Math. U.
308
e(1

Math. U. 308^e
61

Aa1

# Grundlehren der Mathematik,

für

angehende Forstmänner;

von

Dr. Joh. Ad. Reum,
Professor an der K. S. Forstakademie zu Tharand, und Mitgliede
mehrerer gelehrten Gesellschaften.

Bayer. Staatsministerium
f. Ern... u. Forsten
Ministeri...forstabteilung
Bücherei
Aa'
2,6
KGL. BAY. MINISTERIALFORSTBUREAU
1646
452 a

Erster Theil: die Zahlenlehre.

Dresden,
in der Arnoldischen Buchhandlung.
1823.

gd 164174

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# Vorwort.

Beim mathematischen Unterrichte angehender Forstmänner kommt es hauptsächlich darauf an, daß alles das begründet werde, was künftig bei forstlichen Messungen, Abschätzungen und sonstigen Berufgeschäften praktisch in Anwendung kommen soll. Dieser Zweck wird am leichtesten und sichersten durch eine wissenschaftliche Darstellung der nöthigen mathematischen Wahrheiten erreicht, wenn damit eine stete Hinweisung auf den künftigen Gebrauch verbunden ist, und es nicht vernachlässigt wird, vielfältige Uebungen in Lösung solcher Aufgaben anzustellen, welche die allgemeinen Wahrheiten für Viele erst genießbar machen, und doch zugleich einleiten auf die so nöthige Fertigkeit im richtigen Anwenden mathematischer Ergebnisse beim Forstwesen. Beschränkung auf das Wissenschaftlich-Nothwendige, und Heraushebung des Praktisch-Wichtigen — sind dabei wesentliche Erfodernisse.

Um aber den Nutzen, den die Mathematik als Bildungmittel gewährt, wenigstens theilweise zu erreichen, und um mehrere Zuhörer, die auf so verschiedenen Stufen der Bildung, der Kenntnisse und der Fähigkeit stehen, zugleich geistig in Thätigkeit zu erhalten, dazu müssen oft alle Mittel in Bewegung gesetzt werden, die der mathematischen Lehrkunst zu Gebote stehen. Denn damit ist es nicht genug, daß der Lernende eine mathematische Wahrheit sich gefallen lasse, oder nichts dagegen einzuwenden habe, und daß eben so eine neue Wahrheit, ohne inneren Zusammenhang, durchgenommen werde. Es soll vielmehr der Zuhörer dahin gebracht werden, daß er selbstthätig mathematische Dinge hervorbringe und gestalte, daß er sich in dieser geistigen Kraftäußerung gefalle, und daß er dadurch eine gewisse Herrschaft über mathematische Wahrheiten erlange, wodurch er fähig werde, solche Wahrheiten auch gesetz- und zweckgemäß verändern, und sie dann in jedem besonderen oder gegebenen Falle anwenden zu können. Ein solches Unterrichten giebt deutliche Einsicht in die mathematischen Gesetze, sichert den Gebrauch dieser Gesetze, und eröffnet den Weg zur eigenthätigen Weiterbildung, auch sogar in anderen Wissenschaften.

Diese Schrift soll nun ein Hülfmittel zur leichteren Erreichung dieses Lehrzwecks seyn. Sie stellt die nöthi-

gen mathematischen Begriffe, Sätze und Folgerungen mit einigen Beispielen in einer folgerichtigen Ordnung auf, gleichsam Anhalte, woran der Lehrer seine mündlichen Entwickelungen, Beweise, Erläuterungen und Andeutungen (auch für die Mathematik als Wissenschaft) anknüpfen und dabei Anwendungen für das Leben und das Forstwesen machen kann. Bei jedem Satze wird wenigstens das Wozu und Warum genau erörtert. Dieses geschehe nun, bald durch förmliche Demonstrationen, bald durch sokratisches Durchfragen, bald durch selbsteigenes Aufsuchen und Darstellen von dem Lernenden, und dieses mündlich und schriftlich. Bei Vorbereitungen und Wiederholungen lasse ich ein von dem Lernenden sonst schon gebrauchtes, oder ein von mir empfohlenes gutes Lehrbuch der Mathematik zu Hülfe nehmen. Doch ist das Selbstfinden der nöthigen Gründe in gar mancher Hinsicht viel nützlicher für den Lernenden, als das Hören und Lesen gewöhnlicher Beweise. In einer ziemlichen Reihe von Jahren habe ich mich auch praktisch überzeugt von der Nützlichkeit eines solchen Lehrens, und sonst schon sehr unterrichtete junge Männer haben mit Nutzen und Freude noch einen solchen Lehrgang gemacht. Wollen Lehrer, die in meinem Falle sind, diesen Leitfaden auf ähnliche Weise gebrauchen, so werden sie sich bald von dessen Nützlichkeit überzeugen. Auch werden

solche junge Forstmänner, die sich prüfen lassen wollen, leicht wissen können, ob und wie weit sie geschickt sind in Beantwortung mathematischer Fragen, wenn sie, die Sätze dieser Grundlehren zu beweisen, zu erläutern und in ihren wichtigsten Anwendungen zu verfolgen, versuchen wollen — und Uebung in solchen Darstellungen giebt Sicherheit im Antworten bei der wirklichen Prüfung.

Möge der gute Zweck dieser Schrift erreicht, und solcher bei unbefangenen Beurtheilern nicht übersehen werden!

Tharand, im Julius 1823.

D. V.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

# Einleitung.

## 1.

Die Mathematik (Größenlehre, oder besser Ganzheitlehre) ist die Wissenschaft, die Dinge der Zahl und Gestalt nach zu vergleichen. Denn sie lehrt, aus bestimmten Begriffen und aus allgemeinen für sich klaren Sätzen die gedachten und wirklichen Dinge als Ganze, die aus Theilen und Theilganzen bestehen, betrachten, und durch Schlüsse ihre Zahl und Gestalt vergleichen, um dabei das Unbekannte aus dem Bekannten herzuleiten. Die Hilfmittel dazu sind Rechnung und Verzeichnung.

Diese so bezeichnete Wissenschaft wird auch **reine Mathematik** genannt, und die **angewandte** Mathematik ist eine Verbindung jener Lehren mit anderen wissenschaftlichen Lehren, um neue eigenthümliche Wahrheiten mathematisch zu begründen.

**Praktisch** werden einige mathematische Lehren dann genannt, wenn sie unmittelbar auf Dinge des gemeinen Lebens angewandt, und mit ihrer Hülfe solche Dinge erklärt, oder verglichen, oder anschaulich dargestellt werden können.

2.

Wenn aus gleichen Theilen oder Theilganzen, von einerlei Art, zwei Ganze gebildet sind, so heißt dasjenige Ganze das größere, welches die meisten Theile hat; aber beide Ganzen werden in Bezug auf ihre Zusammensetzung Größen genannt. Ferner nennt man auch diejenige Größe eine getrennte, deren Theile unter sich nicht zusammenhängen, und diejenige eine stetige, deren Theile unter sich wirklich so verbunden sind, daß ihre Trennung nur eine gedachte ist.

Nach diesen zwei Hauptrücksichten, der getrennten und stetigen Größen, zerfällt die reine Mathematik in folgende drei Haupttheile:

a) die Zahlenlehre,

b) die Raumlehre, und

c) solche Lehren, die durch Vereinigung jener beiden Betrachtweisen entstehen.

Die Zahlenlehre, als Darstellung der getrennten Größen, zerfällt wieder in die allgemeine und in die besondere, und betrachtet die Zahlen selbst in Absicht auf Einheit, auf Gleichheit, und auf Verhältniß.

Die Raumlehre, als Darstellung der stetigen Größen, zerfällt in die Lehre von den Linien, Flächen und Körpern, und zwar theils in einer Ebene, theils in zwei und mehren Ebenen, theils an Körpern, und als die Körper selbst.

Die Raumgrößen-Rechnung, als eine Vereinigung dieser Betrachtweisen, hat zu ihren Theilen: die

ebene und sphärische Trigonometrie, nebst Polygonometrie, und die höhere Geometrie, mit Einschluß der Differential- und Integral-Rechnung.

3.

Die angewandte Mathematik begreift folgende Theile in sich:

a) die mechanischen Lehren, als: Statik, Hydrostatik, Aërostatik, Mechanik, und Hydraulik;

b) die optischen Lehren, als: Optik, Dioptrik, und Katoptrik;

c) die astronomischen Lehren, als: Astronomie, mathematische Geographie, Chronologie, und Gnomonik; und

d) die technischen Lehren über Baukunst, Geschützkunst, Markscheidekunst u. s. w.

4.

Zur praktischen Mathematik wird vornemlich gerechnet: die gemeine Rechenkunst, die praktische Geometrie, und die Feldmeßkunst.

Praktischen Gebrauch der mathematischen Lehren macht der Forstmann im Allgemeinen bei folgenden Gegenständen, nemlich bei

a) Ausmessung der Forstflächen;

b) Vertheilung dieser Flächen in gleiche und verhältnißmäßige Theile;

c) Berechnung der jetzigen und künftigen Holzmasse;

d) Berechnung des Gehaltes und des Geldwerthes sowohl der einzelnen Holzstücke, Stämme und Klaftern, als auch der ganzen Bestände; und

e) Berechnung der Einnahme und Ausgabe über einzelne Forste und ganze Forstbezirke.

5.

Die mathematischen Wahrheiten haben den Vorzug der unbezweifelten Gewißheit gegen viele Lehren anderer Wissenschaften, und dieser Vorzug ist hauptsächlich in der eigenthümlichen Erkennweise und in der strengen Lehrart begründet. Denn die mathematische Erkennweise erfüllt jederzeit eine Grundfoderung des menschlichen Wissens, welche darin besteht, daß man die mathematischen Vorstellungen nicht nur deutlich und ideel (geistig) anschaut, sondern auch ein der geistigen Anschauung entsprechendes Bild äußerlich nachweiset. Die mathematische Lehrart zeichnet sich aber dadurch aus, daß sie von einfachen und leicht verständlichen Wahrheiten ausgeht, nur unter bestimmt gegebenen Bedingungen nach und nach zu höheren Wahrheiten fortschreitet, und so jeden neuen Satz aus vorhergegangenen Sätzen folgerichtig ableitet.

Daran lassen sich sehr wichtige Betrachtungen knüpfen über das Lehren und Lernen der Mathematik, über ihren Nutzen zur Ausbildung eines richtigen und klaren Denkens, und über ihren möglichen Einfluß auf die Ausbildung und Gestaltung anderer Wissenschaften. —

6.

Zur Aufstellung der Mathematik als Wissenschaft bedient man sich ausdrücklich oder stillschweigend folgender formalen Hilfmittel, als:

a) Erklärungen;

b) Grundsätze;

c) Foderungen;

d) Lehrsätze;

e) Zusätze und Folgerungen;

f) Aufgaben mit ihren Auflösungen; und

g) bestimmter Zeichen.

7.

Die Geschichte und Literatur der Mathematik überhaupt, und namentlich über mathematische Schriften für Forstleute und deren jetziger Werth und Gebrauch — in den Vorträgen.

---

Anmerkung. Wegen der eben namhaft gemachten Anwendungen mathematischer Lehren beim Forstwesen, und auch als Bildungmittel zum deutlichen und richtigen Denken hat besonders ein junger Forstmann wenigstens aus der reinen Mathematik die Zahlen- und Raumgrößen-Lehre ganz und in allen Stücken gründlich zu studiren — und dann wird ihm auch das praktische Anwenden und Gebrauchen dieser Lehren sehr leicht werden; außerdem müßte er sich in seinem Berufe auf die Angaben anderer verlassen, und er könnte

zu vielen Forstgeschäften nur eingeschränkt gebraucht werden. Die auf das Studium der Mathematik verwandte Zeit wird hinlänglich belohnt, und dieß besonders durch geistige Tüchtigkeit. Auch ist dieser mathematische Lehrgang nicht zu ausgedehnt für die Studienzeit auf Forstakademien bei gehöriger Fähigkeit und rechtem Fleiße. Wer aber von jungen Forstmännern Zeit und Kräfte hat, auch die höhere Mathematik zu studiren, wie solche allerdings bei mehreren combinirten Forstaufgaben von ersprießlichem Nutzen ist, der muß, wie es überhaupt zur höhern Ausbildung nützlich seyn dürfte, eine Universität besuchen und daselbst dieses Wissen ausbilden; oder er muß durch Selbststudium sich diese Lehren aneignen und sie mit Sicherheit gebrauchen lernen.

# Erste Abtheilung.

## Zahlenlehre.

# Erster Abschnitt.

## Allgemeine Begriffe, Grundsätze und Zeichen.

§. 1.

Zwei oder mehrere Größen nennt man Größen von einerlei Art, in so fern man blos das betrachtet, was sie Gemeinsames mit einander haben. Das aber heißt die Einheit, was diesen Größen in gewissen Verhältnissen zukommt. Wird nun diese Einheit mehrmals zu sich selbst gesetzt, so heißt diese Handlung zählen, und die dadurch erhaltene Menge von Einheiten ist eine Zahl.

Wird der Begriff der Zahl auf bestimmte Dinge angewandt, so muß man die Art der Dinge namentlich angeben, und dann entstehen benannte Zahlen, z. B. bei Thalern und Klaftern.

§. 2.

Die Zeichen für bestimmte Zahlen sind unsere gemeinen aus ⊠ abgeleiteten Ziffern, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Für allgemeine Zahlbegriffe gebraucht man aber die Buchstaben eines Alphabets, so zwar, daß die ersten desselben, z. B. a, b, c u. s. w., die bekannten Zahlen, und die letzten desselben, z. B. x, y und z, die unbekannten bedeuten.

Sind zwei Zahlenausdrücke gleich, so wird solches durch = ausgedrückt, z. B. 3 Fl. = 2 Thlr.; sind sie

hingegen ungleich, durch $<$ oder $>$, so daß die Oeffnung dieses Zeichens nach der größern Zahl gerichtet ist; z. B. $4 > 3$ heißt 4 ist größer als 3; und $5 < 6$, 5 ist kleiner als 6.

### §. 3.

Wenn zwei Größen, außer ihrer Quantität, noch in einer Beziehung gedacht werden, wo die eine in der anderen so viel aufhebt, als sie selbst beträgt, so nennt man solche Größen entgegengesetzte; sind ferner die Größen schon in einer Verbindung, so kann man diese auch wieder anderen Größen in einer anderen ähnlichen Verbindung entgegensetzen. Solche entgegengesetzte Größen bezeichnet man mit positiv und negativ, oder bejaht und verneint. Wie z. B. möglich und unmöglich, Feuer und Wasser, 3 Meilen vorwärts und 5 Meilen rückwärts, ähnliche Entgegensetzungen sind.

### §. 4.

Zu einer Zahl kann man die Einheit ein- oder etlichemal hinzusetzen, oder davon wegnehmen, wodurch die Zahl selbst vermehrt oder vermindert wird; wie aber einfache und zusammengesetzte, positive und negative Zahlen, einfach und zusammengesetzt verändert, also vermehrt, oder vermindert werden können, dieses muß aus der Natur solcher Zahlen selbst hervorgehen, und dieß nachzuweisen ist Gegenstand der Zahlenlehre.

Das Verfahren dabei, wie aus gegebenen Zahlen, nach den Vorschriften der Zahlenlehre, neue Zahlen gebildet werden, heißt rechnen, und die Rechenkunst ist eine denkrichtige Anwendung allgemeiner Sätze der Zahlenlehre in besonderen Fällen.

§. 5.

Die gesetzmäßigen Veränderungen der Zahlen lassen sich auf folgende Grundrechnungarten zurückführen:

1) Addiren, und das Gegentheil davon: Subtrahiren;
2) Multipliciren, = = = = Dividiren; u.
3) Potenziren, = = = = Depotenziren.

§. 6.

Addiren heißt, Größen zu einander hinzusetzen und mit dem Zeichen der Addition + verbinden; sind überdieß die zu addirenden Größen von einerlei Art und Benennung, so zählt man ihre Einheiten zusammen in eine neue Zahl. Z. B.

$$3 + 4 = 7;\ 3a + b + 3b = 3a + 4b.$$

Die einzelnen Glieder heißen bei der Addition Posten, und das, was nach der Addition herauskommt, wird eine Summe, oder ein Ganzes genannt.

§. 7.

Subtrahiren heißt, die Addition aufheben; und dieß kann geschehen, entweder durch Setzung des Zeichens der Subtraktion — vor die zu subtrahirende Größe, oder durch Abziehung bei Größen von einerlei Art und Benennung, oder endlich durch Addition des Entgegengesetzten. Z. B. $5 - 5 = 0;\ 5a - 3b;$

$$8a - 10a = -2a.$$

Die Glieder der Subtraktion heißen ebenfalls Posten, und das, was nach der Subtraktion herauskömmt, wird genannt: Unterschied, oder Rest (Differenz).

§. 8.

Multipliciren heißt, eine Größe so vielmal nehmen, als eine andere Größe Einheiten enthält. Das Zei-

chen der Multiplikation ist . oder ×, oder bei blosen Buchstaben durch Nebeneinanderstellung. Z. B.

$$3 \cdot 4 = 12;\quad 4a \cdot b = 4ab.$$

Die zu multiplicirenden Zahlen werden Faktoren, und das Ergebniß der Multiplikation wird Produkt genannt.

§. 9.

Dividiren heißt, eine wirkliche oder gedachte Multiplikation aufheben, und dieß ist wirklich geschehen, sobald eine Zahl gefunden ist, die, mit dem Theiler multiplicirt, wieder die erste Zahl giebt. Die Andeutung der Division geschieht durch : oder /. Z. B.

$$36 : 12 = \frac{36}{12} = 3;\quad 8ab : 4b = \frac{8ab}{4b} = 2a.$$

Eine durch Division erhaltene Größe heißt: Quotient.

§. 10.

Potenziren (Erhebung zur Potenz) heißt, die Einheit mit einer gegebenen Zahl, oder irgend eine gegebene Zahl mit sich selbst multipliciren.

Solche durch das Potenziren entstandene Größen sind Potenzen, und den Grad der Potenz zeigt eine Zahl, der Exponent, an, welcher sagt, wie oft potenzirt werden soll, oder potenzirt worden ist. Z. B.

$$3 \cdot 1 = 3^1 = 3;$$
$$3 \cdot 3 = 3^2 = 9;$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3;$$
$$\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} = (\tfrac{1}{4})^2 = 4^{-2}.$$

§. 11.

Depotenziren (eine Wurzel ausziehen) heißt, den Faktor finden, aus welchem die gegebene Potenz entstan-

den ist, oder als entstanden gedacht werden kann. Das Zeichen ist: $\sqrt{\phantom{x}}$. z. B.

$$\sqrt{25} = 5;\ \sqrt[3]{64} = 4;\ \sqrt[n]{a^n} = a.$$

§. 12.

Endlich müssen alle Vorschriften und Sätze der Zahlenlehre auf folgende Grundsätze zurückgeführt werden können:

a) Jedes Ding ist sich selber gleich.

b) Das Ganze ist so groß, als seine Theile zusammengenommen.

c) Das Ganze ist größer, als sein Theil.

d) Wenn zwei Dinge einem dritten gleich sind, so sind sie unter sich gleich.

e) Gleiches zu Gleichem hinzugethan giebt Gleiches; und Gleiches von Gleichem hinweggenommen bleibt Gleiches.

f) Gleiches zu Ungleichem hinzugethan, oder davon weggenommen, giebt oder bleibt Ungleiches.

## Zweiter Abschnitt.

### Das Rechnen in Absicht auf Einheit.

#### §. 13.

#### Vom zehntheiligen Zahlsysteme.

Jede gemeine Ziffer erhält außer ihrem eigentlichen Werthe noch einen besonderen Werth durch die Stelle, in welcher sie mit anderen Ziffern steht, so daß jede Stelle von der Rechten zur Linken um das Zehnfache steigt, und also zehn Einheiten der nächst niederen Stelle eine Einheit der nächst höheren ausmachen.

Die Stelle der Ganzen, oder der Einheit, wird durch das Einerzeichen (,) angemerkt, und jede leere Stelle wird mit Null (0) ausgefüllt. So sind:

| | |
|---|---|
| 3 drei Einheiten, und | |
| 20 zwei Zehner, und | 0,2 zwei Zehntheile, |
| 400 vier Hunderter, und | 0,04 vier Hunderttheile, |
| 5000 fünf Tausender, und | 0,005 fünf Tausendtheile, |
| 60000 sechs Zehntausender, u. | 0,0006 sechs Zehntausendth. |
| 700000 sieb. Hunderttaus. und | 0,00007 sieben Hunderttausendtheile, |
| 1000000 eine Million, und | 0,000001 ein Milliontheil. |
| 1765423 | 0,245671 |

Nun geht das Zählen der Millionen von Stelle zu Stelle wieder fort, wie bei der Einheit, und erst die

dreizehnte Stelle heißt Billion, eben so die neunzehnte Trillion u. s. w.

Zum Aussprechen geschriebener Zahlen werden immer von der Einheit an je drei Ziffern zusammen abgetheilt gedacht, und je sechs Ziffern wieder eben so; dann spricht man die höchsten Zifferabtheilungen zuerst aus, und läßt die niederen folgen.

Danach ist auch das Schreiben ausgesprochener Zahlen einzurichten.

## §. 14.

### Addition ein- und mehrziffriger Zahlen.

Da nur Dinge von einerlei Art zusammengezählt werden können, so schreibt man die gleichbedeutenden Stellen der Posten unter einander, und zählt die Ziffern in jeder Stelle, von der niedrigsten an, zusammen, und nimmt die Zehner dieser Stelle mit zur folgenden Stelle.

$$\begin{array}{r} 3748 \\ 50364 \\ \hline 54112 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1067 \\ 358 \\ \hline 1425 \end{array}$$

Anschaulich läßt sich dieß Verfahren durch Zerlegung der Posten in ihre Theile machen.

$$146 + 529 = 100 + 40 + 6 + 500 + 20 + 9 = 675.$$

## §. 15.

### Subtraktion ein- und mehrziffriger Zahlen.

Um eine Zahl von einer größeren wirklich zu subtrahiren, setzt man wieder die gleichbedeutenden Stellen jener unter die gleichen Stellen dieser Zahl, und zieht dann jede Ziffer von der über ihr stehenden, von der niedrigsten bis zur höchsten Stelle, ab.

$$\begin{array}{r} 786 \\ -\ 152 \\ \hline 634 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1739 \\ -\ 104 \\ \hline 1635 \end{array}$$

1) Soll eine größere Ziffer abgezogen werden von einer über ihr stehenden kleineren Ziffer, so borgt man Eins in Gedanken bei der nächst höheren Stelle, wodurch jene kleinere Ziffer um zehn Einheiten ihrer Stelle vermehrt wird, und also das Abziehen vollzogen werden kann.

$$\begin{array}{r} 83249 \\ -\ 15647 \\ \hline 67602 \end{array}$$

2) Soll der Abzug einer Ziffer von einer über ihr stehenden 0 geschehen, so borgt man ebenfalls Eins bei der nächsten höheren Stelle; und soll endlich dieses Borgen bei einer mit Null ausgefüllten Stelle geschehen, so borgt man über diese Null weg bei der nächst höheren bedeutlichen Ziffer. Ueber jede weggeborgte Null werden 9 Einheiten der nächst höheren abgesetzt, und dann diese Null für 9 gerechnet.

$$\begin{array}{r} 304 \\ -\ 156 \\ \hline 148 \end{array} \quad \text{oder:} \quad \begin{array}{r} 200 + 90 + 14 \\ -\ 100 \pm 50 \pm \ \ 6 \\ \hline 100 + 40 + \ \ 8 \end{array}$$

3) Addition und Subtraktion dienen als entgegengesetztes Rechnen einander zur Probe.

## §. 16.

### Multiplikation ein- und mehrziffriger Zahlen.

Setzt man den einen Faktor so oft zu sich selbst, als der andere Faktor Einheiten hat, so ist schon der Begriff der Multiplikation erfüllt, und es entsteht dadurch das Produkt eben so aus dem einen Faktor, als der andere aus der Einheit.

$$3 . 4 = 4 + 4 + 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12;$$
$$1 . 8 = 8; \qquad 0 . 4 = 0.$$

1) Wird eine Ziffer von einer höheren Stelle mit Einern multiplicirt, so ist das Produkt von der Stelle des höheren Faktors.

$$500 \cdot 3 = 500 + 500 + 500 = 1500.$$

2) Ist ein Faktor mehrziffrig, der andere einziffrig, dann multiplicirt man jede Ziffer des mehrziffrigen Faktors mit dem einziffrigen Faktor, schreibt die niedrige Ziffer des Produkts in diese Stelle, und addirt die höhere zum Produkte der nächsten Stelle.

| | | |
|---|---|---|
| 4783 mal; | oder | 4783 |
| 4 | | 4 |
| 12 | | 19132 |
| 32 | | |
| 28 | | |
| 16 | | |
| 19132 | | |

oder

$$\frac{(4000 + 700 + 80 + 3) \cdot 4}{16000 + 2800 + 320 + 12 = 19132.}$$

3) Sind beide Faktoren mehrziffrig, dann multiplicirt man den einen Faktor zuerst mit dem Einer des anderen Faktors gerade wie vorhin, und setzt zugleich die Ziffern des erhaltenen Produkts in die ihnen zukommenden Stellen; hierauf multiplicirt man denselben Faktor eben so auch mit den Zehnern, Hundertern ꝛc. des anderen Faktors, und setzt die Produkte sogleich in die gehörigen Stellen, so daß man bei Multiplikation mit dem Zehner, Hunderter ꝛc. auch die Produkte mit diesen Stellen zu schreiben anfängt. Zuletzt addirt man alle diese Produkte, und erhält dann das Produkt der multiplicirten Zahlen.

```
4587 mal
   296
 -------
  27522
 41283
 9174
 -------
1357752
```

oder: 4587 . 6 = 27522
4587 . 90 = 412830
4587 . 200 = 917400

(4587) . (6 + 90 + 200) = 1357752

4) Kommen Nullen am Ende bedeutlicher Ziffern vor, so kann man sie, während der Multiplikation dieser, unbeachtet lassen, und nur dem Produkte sämmtliche End-Nullen anhängen. Hat aber der multiplicirende Faktor Nullen zwischen seinen Ziffern, so muß man mit dem Produkte der folgenden Ziffer um eben so viele Stellen weiter zur Linken rücken.

13400 mal; oder: 13400 . 20 = 268000
620 13400 . 600 = 8040000
268 8308000
804
8308000

5) Wenn ein Faktor schon ein Produkt aus anderen Faktoren ist, so kann man auch statt desselben die Multiplikation mit den Faktoren verrichten.

303 . 15 = 303 . 5 . 3 = 4545.

6) Eine abgekürzte Multiplikation bestimmt blos die Stellen im Produkte bis zu einer beliebig angenommenen Entfernung von der Einheit, und läßt die übrigen weg. Z. B. auf 4 Stellen:

2,4351 . . . mal
0,7325 . . .
1,70457
(0,0)7305
(0,00)486
(0,00)120 giebt
1,78368

Anmerk. Mit welchem Faktor man multipliciren will, ist in Absicht auf das Produkt einerlei; nur ist

es bequemer mit dem zu multipliciren, der die wenigsten bedeutlichen Ziffern hat.

## §. 17.

### Division ein- und mehrziffriger Zahlen.

Jede zu dividirende Zahl wird angesehen als ein Produkt, wovon der Theiler, als der eine Faktor, gegeben ist, und wozu der andere Faktor als Quotient gesucht wird; mithin muß auch der gefundene Quotient eben so oft in der zu dividirenden Zahl enthalten seyn, als die Einheit im Theiler.

1) Bei kleinen Zahlen läßt sichs leicht nach dem vorigen §. übersehen, wie vielmal der Theiler in einer Zahl enthalten ist, und war die Zahl kein vollkommenes Produkt, so bleibt, nachdem das Produkt aus dem Theiler und dem größten Quotienten abgezogen worden, ein Rest, der noch getheilt werden soll, und den man durch das Divisionzeichen mit dem Theiler verbindet, und dem Quotienten anhängt.

$$63 : 7 = \frac{7 \cdot 9}{7} = 9; \quad 31 : 6 = \frac{5 \cdot 6 + 1}{6} = 5 + \tfrac{1}{6} = 5\tfrac{1}{6}.$$

2) Ist der Theiler einziffrig und die zu dividirende Zahl mehrziffrig, dann sucht man zur höchsten Ziffer der zu dividirenden Zahl, oder, wenn diese kleiner als der Theiler, zu den beiden höchsten Ziffern desselben, den größten Quotienten, und subtrahirt das Produkt aus dem Theiler und diesem Quotienten von der Ziffer oder den beiden Ziffern, in welche dividirt wurde. Mit jeder folgenden Ziffer, und dem etwa gebliebenen Reste, verfährt man eben so, und setzt dieses Verfahren bis zu Ende fort. Endlich ist der gesuchte Quotient selbst gleich der Summe dieser einzelnen gefundenen Quotienten.

4 : 67384 ‡ 10000; oder 6 : 7854 ‡ 1309

```
4 : 67384 ‡ 10000;
    40000
    -----
    27384    6000
    24000
    -----
     3384     800
     3200
    -----
      184      40
      160
    -----
       24       6
       24   -----
    -----   16846
        0
```

```
6 : 7854 ‡ 1309
    6
    --
    18
    18
    --
     54
     54
     --
      0
```

3) Wenn der Theiler und auch die zu dividirende Zahl mehrziffrig ist, dann nimmt man von der zu theilenden Zahl so viele Stellen oder eine mehr, von der höchsten an, als der Theiler selbst hat, und sucht dazu einen Quotienten wie im vorigen Falle; das Produkt aus Theiler und Quotienten abgezogen von den dividirten Stellen giebt einen Rest, zu dem man eine neue Stelle von der zu theilenden Zahl nimmt und wieder einen Quotienten sucht. Dieses Verfahren setzt man bis zu Ende fort.

12 : 7692 ‡ 600; oder 12 : 7692 ‡ 641

```
12 : 7692 ‡ 600;
     7200
     ----
      492    40
      480
     ----
       12     1
            ---
            641
```

```
12 : 7692 ‡ 641
     72
     --
      49
      48
      --
       12
       12
       --
        0
```

4) Ist während der Division ein Rest geblieben, der mit der neuen Ziffer eine Summe giebt, die kleiner als der Theiler ist, so ist der dazu gehörige Quotient = 0; diese setzt man an die Stelle des dermaligen Quotienten, nimmt zum Reste gleich noch die nächst folgende Stelle, und fährt wieder wie gewöhnlich zu dividiren fort.

346 : 139092 ‡ 402
1384
692
692
0

5) Hat ein Theiler viele Ziffern, wo es nicht leicht zu übersehen ist, welchen Quotienten man jedesmal nehmen muß, damit das zu bildende Produkt nicht zu groß und nicht zu klein ausfalle; und hätte man etwa öfters mit dieser Zahl zu dividiren, so bilde man sich daraus Produkte von 1 bis 9, und es läßt sich dann mit einem Blicke übersehen, welches Produkt sich abziehen läßt, und welches der entsprechende Quotient ist.

| | |
|---|---|
| 1728 | 1 |
| 3456 | 2 |
| 5184 | 3 |
| 6912 | 4 |
| 8640 | 5 |
| 10368 | 6 |
| 12096 | 7 |
| 13824 | 8 |
| 15552 | 9 |

1728 : 7269696 ‡ 4207
6912
3576
3456
12096
12096
0

6) Wird der Theiler und die zu dividirende Zahl mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt, so hat dieß keinen Einfluß auf den zu findenden Quotienten.

$4 : 32 = 8;$
$2 : 16 = 8;$
$20 : 160 = 8.$

7) Eine abgekürzte Division entsteht dadurch, daß man bis an die letzte Ziffer wie gewöhnlich dividirt, und nun, statt eine Null an den Rest zu hängen, jedesmal eine letzte Stelle aus dem Divisor wegstreicht. Z. B.

```
    0,7325 : 1,78371   oder
    7325 : 17837,1 ‡ 2,4351
           14650
           31871
           29300
     732 :  2571
            2196
      73 :   375
             365
       7 :    10
               7
```

8) Multiplikation und Division dienen, als entgegengesetztes Rechnen, einander zur Probe.

## §. 18.

### Von zehntheiligen Brüchen.

Da nach unserem Zehnsysteme (§. 13.) die Zahlenwerthe, in den Stellen vom Einerzeichen an, zur Rechten eben so fallen, als sie zur Linken steigen, und also auch in diesen Stellen zur Rechten des Einerzeichens immer zehn einzelne Werthe einen Werth in der nächst höheren ausmachen; so begreift man unter jedem solchen Zahlenausdrucke, der kleiner als Eins ist, einen zehntheiligen Bruch (Decimalbruch). Solche zehntheilige Brüche können in ihren Stellen einzeln, oder auch zusammen ausgesprochen werden; sind Ganze (oder Einheiten) dabei, so spricht man diese gewöhnlich für sich aus, und läßt darauf den zehntheiligen Bruch folgen.

Z. B. 0,4738 = vier Zehntheile, sieben Hunderttheile, drei Tausendtheile und acht Zehntausendtheile, oder 23,4738 = drei und zwanzig Ganze und viertausend siebenhundert und acht und dreißig Zehntausendtheile.

Ist das Einerzeichen in einer Zahl bestimmt und gesetzt, so kann man an diese Zahl rechts und links Nullen nach Belieben anhängen, ohne ihren Werth zu verändern. 13,45 = 0013,45000.

Das Wesentliche über die vier Grundrechnungen mit zehntheiligen Brüchen besteht in Folgendem.

1) Addirt werden zehntheilige Brüche, auch verbunden mit ganzen Zahlen, wenn man die gleichbedeutenden Stellen der Posten unter einander schreibt, sie dann wie lauter ganze Zahlen addirt, und nun in der Summe das Einerzeichen zwischen dieselben Stellen schreibt, wo es in den Posten ist.

```
    4,783        284,378
   16,54           1,82
  128,3007        15,6949
  --------         0,403
  149,6237       --------
                 302,2959
```

2) Subtrahirt werden zehntheilige Brüche, auch verbunden mit ganzen Zahlen, dadurch, daß man die gleichbedeutenden Stellen der abzuziehenden Zahl unter die Stellen derjenigen Zahl schreibt, von welcher abgezogen werden soll, dann wie bei ganzen Zahlen wirklich subtrahirt, und zuletzt das Einerzeichen zwischen dieselben Stellen setzt, zwischen welchen es vorher stand.

```
    0,7328       54,398
  — 0,4596        2,745
  --------      -------
    0,2732       51,653
```

Haben in den Posten die zehntheiligen Brüche nicht gleichviele Stellen, so kann man die fehlenden Stellen mit Nullen ausfüllen.

```
1,8754 — 0,97 giebt   1,8754
                    — 0,9700
                    --------
               Rest = 0,9054
```

| | | |
|---|---|---|
| 24,3 — 0,9738 giebt | 24,3000 | |
| | 0,9738 | |
| | 23,3262 | |

3) Multiplicirt werden zehntheilige Brüche, auch verbunden mit ganzen Zahlen, gerade so, als wenn man lauter ganze Zahlen zu multipliciren hätte, und nur im Produkte schneidet man zuletzt eben so viele Stellen von der Rechten zur Linken für den zehntheiligen Bruch ab, als solcher Stellen in beiden Faktoren zusammengenommen waren.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3,47 mal | 4,035 mal | 84,72 mal |
| | 0,3 | 2,5 | 1,004 |
| Produkt | 1,041 | 20175 | 33888 |
| | | 8070 | 8472 |
| | | 10,0875 | 85,05888 |

a) Sind in der durch Multiplikation erhaltenen Zahl nicht so viele Stellen, als deren für das Produkt verlangt werden, so setzt man links die nöthigen Nullen vor.

$$4,34 \cdot 0,02 = 0,0868.$$

b) Ein zehntheiliger Bruch wird mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt, wenn man das Einerzeichen um eine, zwei, drei u. s. w. Stellen zur Rechten rückt.

$$4,63 \cdot 10 = 46,3; \quad 0,4738 \cdot 1000 = 473,8.$$

4) Bei der Division zehntheiliger Brüche, auch verbunden mit ganzen Zahlen, wird der Theiler, wenn er nicht schon eine ganze Zahl ist, dadurch zur ganzen Zahl gemacht, daß man in ihm das Einerzeichen wegläßt und solches in der zu dividirenden Zahl genau um eben so viel Stellen zur Rechten rückt; hierauf dividirt man wirklich bis an das Einerzeichen in der zu dividirenden Zahl, und bemerkt jetzt den Anfang der zehntheiligen Stellen im Quotienten durch das Einerzeichen; dann setzt

man das Dividiren bis an das Ende, oder durch Anhängung neuer Nullen beliebig fort.

4 : 1,076 ‡ 0,269;

8
27
24
36
36
0

3 : 20,41 ‡ 6,8033...

18
24
24
1
10
9
10

4,03 : 143,468 oder
403 : 14346,8 ‡ 35,6

1209
2256
2015
2418
2418
0

0,024 : 7,89 oder
24 : 7890, ‡ 328,75

72
69
48
210
192
180
168
120
120
0

a) Durch ein solches fortgesetztes Dividiren kann man freilich den Werth des Quotienten dann nicht genau im zehntheiligen Bruche ausdrücken, wenn immer gleiche Reste bleiben; aber man kann sich dem Werthe doch beliebig nähern, so daß zuletzt das Fehlende als unbedeutend weggelassen werden dürfte. Will man es andeuten, daß der Werth des Quotienten nicht vollkommen genau ausgedrückt ist, so setzt man drei Punkte an ihn.

$$\frac{4}{3} = 1{,}333\ldots$$

b) Das Einerzeichen um eine Stelle, oder um zwei, drei u. s. w. Stellen zur Linken rücken, heißt diese Zahl mit 10 oder 100 u. s. w. dividiren.

Anmerk. Auch bei den Rechnungen mit zehntheiligen Brüchen müssen, wie allgemein §. 5. angedeutet, Addition und Subtraktion eben so, wie Multiplikation und Division, einander zur Probe dienen.

$$4{,}087 - 0{,}107 = 3{,}98; \text{ und } 3{,}98 + 0{,}107 = 4{,}087.$$

$$\frac{7{,}89}{0{,}024} = 328{,}75; \text{ und } 328{,}75 \cdot 0{,}024 = 7{,}89.$$

## §. 19.

### Rechnungen mit einfachen allgemeinen Größen.

Jede gedachte und wirkliche Zahlgröße kann (§. 2.) mit einem Buchstaben bezeichnet werden, und dann wird mit solchen allgemeinen für Zahlen geltenden Buchstaben ebenfalls gerechnet werden können, wenn nur genau die Begriffe und Sätze des Rechnens befolgt werden. Diese Rechnung mit Buchstaben bezeichnet überhaupt die allgemeine Form des Rechnens, indem sie durch ihre Buchstabenausdrücke jeden besonderen Rechnungfall mit Ziffern in sich begreift, und in sich zugleich die Form des Verfahrens darstellt. Buchstaben-Rechnung ist gleichsam die eigentliche und kürzeste Sprache des Rechnens.

1) Soll nun ein Buchstabe mit einem anderen so zusammenkommen, daß beide eine Rechnung vorstellen, so setzt man nur das Zeichen dieser Rechnungart zwischen beide Buchstaben, nur daß multiplicirte Buchstaben auch ohne Zeichen beisammengesetzt werden. Es heißt demnach:

$a + b$ es wird zu a ein b addirt;

$a - b$ es wird von a ein b subtrahirt;

$a \cdot b = ab$ es wird a mit b multiplicirt;

$a : b = \frac{a}{b}$ es wird a durch b dividirt;

$a \cdot a = aa = a^2$ es wird a in die zweite Potenz erhoben;

$\sqrt[n]{a^n} = a$ es wird $a^n$ depotenzirt.

2) Kommen mehrere Buchstaben zusammen, so gilt jeder das, was sein Vorzeichen ausspricht; als $a + b - c$ heißt: zu a wird b addirt und davon c subtrahirt. Soll sich aber ein Zeichen weiter als auf den nächsten Zahlenausdruck erstrecken, so wird alles, was sich auf dieses Zeichen beziehen soll, in eine Klammer eingeschlossen; $a \cdot (a - b)$ heißt, es soll die Zahl a mit dem Unterschiede von $(a - b)$ multiplicirt werden, und eine solche Klammer kann erst dann weggelassen werden, wenn ihr Vorzeichen wirklich befriedigt ist.

3) Sind zwei Größen entgegengesetzt, und die eine Größe hat das Zeichen + erhalten, so wird die entgegengesetzte das Zeichen — erhalten müssen. Kommen solche entgegengesetzte Größen von einerlei Art zusammen, so wird die kleinere von der größeren abgezogen (§. 3.) und das Zeichen der größeren beibehalten.

$$3a - a = 2a; \quad 3a - 5a = -2a.$$

4) Da Dinge von einerlei Art zusammen gezählt werden können (§. 6.), so ist die Summe mehrerer gleichen Größen eine Zahl, die anzeigt, wie viel solcher Größen genommen werden sollen; eine solche Zahl heißt Coëfficient.

$a + a = 2a$; $2a + a = 3a$; $7a + b + 2a = 9a + b$;

$ma + na + ma = 2ma + na$.

$a - b - 3b = a - 4b$.

5) Sollen zwei oder mehrere Größen von einer anderen subtrahirt werden, so bekommen jene sämmtlich das Subtraktionzeichen; haben aber die zu subtrahirenden Grö-

ßen schon das Zeichen $-$, so werden diese negativen Größen mit $+$ versehen, und nun addirt (§. 7.).

$$\begin{array}{r} 7a \\ -7a \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7a \\ -3a \\ \hline 4a \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8a \\ \mp a \\ \hline 9a \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \\ \mp b \\ \hline a+b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6a \\ \mp 7a \\ \hline a \end{array} \qquad \begin{array}{r} -4a \\ -2a \\ \hline -6a \end{array} \qquad \begin{array}{r} -a \\ \mp 3b \\ \hline 3b-a \end{array}$$

6) Einfache allgemeine Größen werden multiplicirt, wenn man sie ohne Zeichen zusammen schreibt; sind Coefficienten dabei, so wird ihr Produkt dem der Buchstaben vorgesetzt.

$$a \,.\, b \,.\, c = abc; \quad a \,.\, b \,.\, a \,.\, b \,.\, c = aabbc;$$
$$3a \,.\, 4b = 12ab; \quad 3a \,.\, 5ab = 15aab.$$

Sind entgegengesetzte Größen zu multipliciren, so verfährt man eben so, nur daß man dem Produkte ein Zeichen nach folgender Vorschrift vorsetzt:

„Gleiche Zeichen geben $+$,
„verschiedene aber $-$;"

wobei vorausgesetzt ist, daß eine Größe ohne Zeichen, wie gewöhnlich am Anfange eines Buchstabenausdrucks, immer für eine positive, also mit $+$ versehene, gilt.

$$+a \,.\, +b = +ab = ab; \quad -a \,.\, -b = +ab = ab;$$
$$+a \,.\, -b = -ab; \text{ und } -a \,.\, +b = -ab;$$

denn $(a - b) \,.\, c = ac - bc$; und
$(a - b) \,.\, d = ad - bd$; folglich auch

---

$$(a - b) \,.\, (c + d) = ac + ad - bc - bd; \text{ und}$$
$$(a - b) \,.\, (c - d) = ac - ad - bc + bd.$$

7) Dividirt werden einfache allgemeine Größen dadurch, daß man entweder die Division durch ihr Zeichen an ihnen ausdrückt, oder die Multiplikation aufhebt, so fern die zu dividirende Größe wirklich ein Produkt ist (§. 17. 6.).

Bei entgegengesetzten Größen gilt für die Division ebenfalls das Gesetz: Gleiche Zeichen geben +, und verschiedene —.

$$a : b = \frac{a}{b}; \quad 6a : 3b = \frac{6 . a}{3 . b} = \frac{2a}{b};$$

$$8abc : 2ab = \frac{8 . a . b . c}{2 . a . b} = \frac{4 . 1 . 1 . c}{1 . 1 . 1} = 4c;$$

$$16a : -4ab = -\frac{16a}{4ab} = -\frac{4}{b};$$

$$-12ab : 6a = -\frac{12ab}{6a} = -2b.$$

## §. 20.

### Rechnungen mit potenzirten einfachen Größen.

Eine potenzirte Größe ist eine solche, die durch eine Wurzel, oder durch einen Faktor mit einem Exponenten ausgedrückt ist, und also angesehen werden muß, als sey sie durch das Potenziren entstanden (§. 10.).

1) Addirt und subtrahirt werden potenzirte Größen, theils durch das Zusammenzählen und Abziehen, wenn nemlich eine und dieselbe Wurzel mit gleichen Exponenten vorkommt, theils durch bloses Setzen des Zeichens für die entsprechende Rechnungart.

$$a^2 + a^2 + 3a^2 = 5a^2; \quad a^n + a^n = 2a^n;$$
$$3a^2 - a^2 + b^3 = 2a^2 + b^3;$$
$$a^2c + b^3c = (a^2 + b^3) c;$$
$$3a^4 - 5a^4 + 6a^3 = 6a^3 - 2a^4.$$

2) Multiplicirt werden einerlei Wurzeln in verschiedenen Potenzen dadurch, daß man ihre Exponenten addirt; verschiedene Wurzeln werden ohne Zeichen verbunden, und haben sie einen gemeinschaftlichen Exponenten, so wird ihnen dieser als einem Produkte zugetheilt.

$$a \,.\, a = aa = a^1 \,.\, a^1 = a^{1+1} = a^2;$$
$$a^2 \,.\, a^3 = aa \,.\, aaa = a^{2+3} = a^5;$$
$$a^m \,.\, a^n = a^{m+n};$$
$$a^n \,.\, a^n = a^{n+n} = a^{2n};$$
$$a \,.\, a^m = a^{1+m};$$
$$a^2 \,.\, b^2 = (ab)^2;$$
$$a^{-3} \,.\, a^4 = a^1 = a;$$
$$a^{-2} \,.\, a^{-3} = a^{-5};$$
$$3a^2 \,.\, 4a^3 = 12a^5;$$
$$a^{n5} \,.\, a^{m5} = (a^m \,.\, a^n)^5;$$
$$a^3 \,.\, b^2 \,.\, c^n = a^3 b^2 c^n.$$

3) Dividirt werden potenzirte Größen von einerlei Wurzeln durch Subtraktion des Exponenten des Theilers von dem der zu dividirenden Größe; dagegen potenzirte Größen von verschiedenen Wurzeln blos mit dem Zeichen der Division verbunden werden.

$$a^3 : a^2 = \frac{aaa}{aa} = a^{3-2} = a^1 = a;$$
$$a^2 : a^2 = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1;$$
$$a^2 : a^3 = \frac{aa}{aaa} = a^{2-3} = a^{-1} = \frac{1}{a};$$
$$a^5 : a^n = a^{5-n};$$
$$a^m : a = a^{m-1};$$
$$a : a^m = a^{1-m}.$$

Zusatz. Allgemeine, durch Buchstaben ausgedrückte Zahlen können in einem besonderen Falle auch nur einen bestimmten Werth haben.

Setzt man daher für jeden Buchstaben einen Werth in Ziffern, so gilt von dieser Ziffer alles in einer besonderen Formel, was die Formel vom Buchstaben ausspricht, und man kann dann allgemeine Größen in besondere Zifferausdrücke umwandeln. Wäre z. B. a = 4, b = 3 und c = 5, so würde seyn:

$$\left(\frac{3a^2 - bc}{ab - 2c}\right) \cdot 2b = 99.$$

Uebungen in solchen Auflösungen machen den Werth und die Bedeutung der Buchstabenrechnung recht anschaulich.

## §. 21.

### Von ordentlichen Brüchen im Allgemeinen, und vom Aufheben und Gleichnamigmachen derselben im Besonderen.

1) Wird eine Division aus irgend einem Grunde blos angedeutet, so nennt man das Ganze einen ordentlichen Bruch, oder auch einen Bruch schlechthin, und es wird dann die zu dividirende Zahl der Zähler, und der Theiler wird Nenner genannt. Z. B.

$$\frac{12}{4}; \text{ oder } \frac{1}{5} \text{ und } \frac{a}{b}.$$

Gewöhnlich ist ein solcher Bruch eine Zahl, die als Quotient nicht ganze Einheiten, sondern nur Theile der Einheit angiebt, und dann sagt der Nenner an, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt werden soll, und der Zähler spricht aus, wie viele solcher gleichen Theile genommen werden sollen.

$$\frac{3}{4}; \quad \frac{1}{5}; \quad \frac{3a}{4b}.$$

Hat dagegen ein Bruch zum Zähler eine größere Zahl, als zum Nenner, so nennt man ihn einen unächten Bruch.

2) Jede ganze Zahl läßt sich auch als Bruch darstellen, wenn man ihr zum Nenner 1 giebt.

$$3 = \frac{3}{1} \text{ oder } a = \frac{a}{1}.$$

3) Der Werth eines Bruchs wird nicht geändert, wenn Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt werden (§. 17. 6.).

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7}{4 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{42}{56}; \quad \frac{24}{96} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}; \quad \frac{ab}{abc} = \frac{1}{c}.$$

4) Da Zahlen um so leichter zu übersehen sind, je einfacher sie gegeben werden; so bringt man den Werth eines Bruchs gern auf den kleinsten Zahlenausdruck, und dieses Verfahren nennt man einen Bruch aufheben. Das Aufheben eines Bruchs geschieht durch Division des Zählers und des Nenners mit einer und derselben Zahl.

$$\frac{27}{30} = \frac{27:3}{30:3} = \frac{9}{10}; \quad \frac{ab}{bd} = \frac{a}{d}.$$

Soll ein Bruch sich demnach aufheben lassen, so müssen seine Glieder Produkte mit einem gemeinschaftlichen Faktor seyn, und es kann zur Auffindung dieses gemeinschaftlichen Faktors dienen, wenn man sich merkt, daß bei Ziffern jedes Produkt mit 2 eine gerade Zahl giebt, daß jedes Produkt aus 3 eine Zahl giebt, deren Ziffersumme sich mit 3 theilen läßt, daß, mit 5 multiplicirt, der Einer des Produkts 5 oder 0 ist, u. s. w.

Der größte gemeinschaftliche Theiler eines Bruchs wird gefunden, wenn man mit dem Zähler eines Bruchs in sei-

nen Nenner dividirt, hierauf wieder mit dem gebliebenen Reste in den eben gebrauchten Divisor dividirt, und dieses Dividiren so lange fortsetzt, bis zum Reste 0 oder 1 bleibt; bleibt Null, so ist der zuletzt gebrauchte Divisor der gemeinschaftliche Theiler; bleibt aber 1, so läßt sich der Bruch gar nicht aufheben.

$$\frac{1617}{1911} = \frac{1617 : 147}{1911 : 147} = \frac{11}{13};$$

1617 : 1911 ‡ 1
1617
294 : 1617 ‡ 5
1470
147 : 294 ‡ 2
294
0

5) Zwei oder mehrere Brüche gleichnamig machen heißt, ihnen unbeschadet des Werthes einen gleichen Nenner geben. Dieses Gleichnamigmachen geschieht dadurch, daß man entweder eine Zahl zum gemeinschaftlichen Nenner, in welcher alle einzelnen Nenner ohne Rest dividirt werden können, annimmt; oder daß man jeden Bruch mit den Nennern der übrigen Brüche multiplicirt; oder endlich daß man den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner auf folgende Weise sucht:

Man verbinde alle Nenner mit dem Zeichen der Multiplikation, und dividire, so oft es angeht, je zwei oder mehrere dieser Faktoren mit je einer Zahl, so geben die gebliebenen Quotienten und Faktoren mit den gebrauchten Theilern die gesuchte Zahl.

I. $\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=\frac{1\cdot 12}{2\cdot 12}+\frac{5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}=\frac{12}{24}+\frac{20}{24}+\frac{9}{24};$

II. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5}+\frac{2\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 5}+\frac{4\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 2\cdot 3}=\frac{15}{30}+\frac{20}{30}+\frac{24}{30};$

III. $\frac{1}{36} + \frac{5}{24} + \frac{7}{108} = \frac{6}{216} + \frac{45}{216} + \frac{14}{216}$;

$$\begin{array}{r|l} 4: & 36 \cdot 24 \cdot 108 \\ \hline 9: & 9 \cdot 6 \cdot 27 \\ \hline 3: & 1 \cdot 6 \cdot 3 \\ \hline & 2 \cdot 1 \end{array}$$

IV. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$;

V. $\frac{1}{a} + \frac{b}{ac} + \frac{a}{bc} = \frac{bc}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{a^2}{abc}$.

## §. 22.

### Vom Rechnen mit Brüchen.

1) Haben Brüche gleiche Nenner, so können ihre Zähler als Dinge von einerlei Art angesehen, und also zusammen gezählt und von einander abgezogen werden. Um also Brüche zu addiren oder zu subtrahiren, macht man sie gleichnamig, addirt oder subtrahirt die Zähler, und giebt im ersten Falle der Summe, im zweiten dem Unterschiede den gemeinschaftlichen Nenner.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \frac{13}{12} = 1\tfrac{1}{12};$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12};$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd};$$

$$\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{c} = \frac{2ac}{3bc} - \frac{9b^2}{3bc} = \frac{2ac - 9b^2}{3bc};$$

$$a + \frac{b}{c} - \frac{d}{b} = \frac{abc}{bc} + \frac{b^2}{bc} - \frac{cd}{bc} = \frac{abc + b^2 - cd}{bc}.$$

2) Multiplicirt werden Brüche, wenn man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt, und das

Produkt der Zähler zum neuen Zähler und das Produkt der Nenner zum neuen Nenner macht. Gemischte Zahlen (d. h. Ganze und Brüche) kann man vor der Multiplikation in einen unächten Bruch verwandeln, und ganze Zahlen, die mit Brüchen multiplicirt werden sollen, verwandelt man in Brüche, die zum Nenner 1 haben.

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{bc} = \frac{a}{c};$$

$$3\tfrac{1}{2} \cdot 4\tfrac{1}{5} = \frac{7}{2} \cdot \frac{21}{5} = \frac{147}{10} = 14\tfrac{7}{10};$$

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) \cdot \frac{b}{d} = \frac{ac + b}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{abc + b^2}{cd};$$

$$3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5} = 2\tfrac{2}{5};$$

$$a \cdot \frac{3b}{2ac} = \frac{a}{1} \cdot \frac{3b}{2ac} = \frac{3ab}{2ac} = \frac{3b}{2c}.$$

3) Bei zu dividirenden Brüchen wird derjenige Bruch, welcher der Theiler ist, umgekehrt, so daß der Zähler als Nenner und der Nenner als Zähler gesetzt wird, und dann multiplicirt man mit diesem so erhaltenen Bruche. Ganze Zahlen werden vorher in Brüche, die zum Nenner 1 haben, und gemischte Zahlen in unächte Brüche verwandelt.

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{8} = 1\tfrac{7}{8};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} : \frac{2}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8};$$

$$\frac{b}{c} : a = \frac{b}{c} : \frac{a}{1} = \frac{b}{c} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{ac};$$

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b};$$

$$7\tfrac{1}{2} : 3\tfrac{1}{4} = \frac{15}{2} : \frac{13}{4} = \frac{15}{2} \cdot \frac{4}{13} = \frac{60}{26} = 2\tfrac{4}{13};$$

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{acc+bc}{bc} = \frac{ac+b}{b}.$$

Anmerk. Auch hier dienen Addition und Subtraktion, wie Multiplikation und Division, einander zur Probe.

## §. 23.

### Verwandlung ordentlicher Brüche in zehntheilige und umgekehrt.

1) Da jeder ordentliche Bruch eigentlich eine nicht ausgeführte, sondern nur angedeutete Division vorstellt; so darf man bei den in Ziffern ausgedrückten Brüchen nur wirklich mit dem Nenner in den Zähler dividiren, um den entsprechenden zehntheiligen Bruch zu erhalten. Bei dieser Umwandlung der gemeinen Brüche in zehntheilige entstehen zuweilen periodische Brüche. — Oft ist's vortheilhafter, mit zehntheiligen Brüchen statt mit den gemeinen zu rechnen.

$$\frac{3}{4} = 0{,}75; \quad \frac{1}{25} = 0{,}04;$$

$$\frac{8}{11} = 0{,}7272\ldots; \quad \frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$$

2) Um einen zehntheiligen Bruch in einen ordentlichen zu verwandeln, multiplicirt man ihn mit einer Potenz der 10, setzt hierauf diese Potenz als Nenner unter das erhaltene Produkt, und hebt solchen Bruch auf. Die Potenz der 10 muß dabei so viele Nullen mit der Einheit haben, als es zehntheilige Stellen im zehntheiligen Bruche sind.

$$0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4};$$

$$0{,}8125 = \frac{8125}{10000} = \frac{13}{16}.$$

3) Hier ließe sich eine bestätigende Vergleichung anstellen zwischen den Ergebnissen der zehntheiligen und der ordentlichen Bruchrechnung.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ oder } 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75;$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20} \text{ oder } 0{,}75 - 0{,}2 = 0{,}55;$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \text{ oder } 0{,}75 \cdot 0{,}4 = 0{,}3;$$

$$\frac{58}{125} : \frac{8}{25} = 1\tfrac{9}{20} \text{ oder } \frac{0{,}464}{0{,}32} = 1{,}45.$$

## §. 24.

### Von zusammenhängenden (oder Ketten-) Brüchen.

1) Jeden ordentlichen Bruch, der auf den kleinsten Namen gebracht, kann man noch aufheben durch seinen Zähler, und erhält dadurch einen neuen gleichen Bruch, der zum Zähler 1 und zum Nenner eine ganze Zahl nebst einem angehängten Bruche hat; wird nun mit diesem angehängten Bruche wieder eben so verfahren, und dieses Verfahren entweder beliebig, oder gar so lange fortgesetzt, bis dieser angehängte Bruch verschwindet und also der letzte Nenner eine ganze Zahl ist: so wird dadurch ein **zusammenhängender** Bruch erhalten.

$$\frac{5}{7} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} \quad \text{oder} \quad \frac{17}{46} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}$$

2) Wenn von einem zusammenhängenden Bruche nur das erste Glied, ohne die folgenden Werthe, genommen wird, so ist dieser Werth größer als der des Bruchs; wird aber dazu noch das folgende Glied genommen, so ist der dadurch erhaltene Werth etwas zu klein gegen den des Bruchs. Dieses wechselt nun immer so fort ab, nur daß die Abweichung jedes folgenden Werthes immer geringer wird. So ist im vorigen zweiten Beispiele

$$\frac{1}{2} > \frac{17}{46} \text{ und } \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}} < \frac{17}{46};$$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} > \frac{17}{46}; \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} < \frac{17}{46}.$$

3) Soll daher ein gegebener Bruch, der sich auf die gewöhnliche Weise nicht aufheben läßt, weil Zähler und Nenner Primzahlen unter sich sind, in einem kleineren Zahlenausdrucke angedeutet werden ohne merkliche Aenderung seines Werthes; dann verwandelt man ihn in einen zusammenhängenden Bruch, und nimmt davon so viele Glieder, als dazu nöthig sind, um nach den Umständen nicht merklich zu fehlen.

Zur bequemen Ausführung einer solchen Aufgabe, z. B. $\frac{10000}{10373}$ abzukürzen, bildet man den zusammenhängenden Bruch nicht wirklich aus, sondern man schreibt die gefundenen Quotienten der Ordnung nach hinter einander, setzt darunter vorwärts den Bruch $\frac{0}{1}$ und dazu unter den ersten Quotienten einen Bruch, der zum Zähler 1 und zum Nenner den ersten Quotienten hat. Dann setzt man un-

ter jeden folgenden Quotienten einen Bruch nach folgendem Gesetze:

Jeder Quotient wird mit dem Zähler und Nenner des nächst vorhergehenden Bruchs multiplicirt, und es wird vom zweiten vorhergehenden Bruche der Zähler zu jenem Produkte aus Zähler und Quotienten, und der Nenner zu jenem Produkte aus Nenner und Quotienten addirt.

Die dadurch erhaltenen Brüche kommen nun dem Werthe immer näher, und man hat zum nöthigen Gebrauche die Auswahl. Es giebt aber im obigen Beispiele folgende Quotienten:

```
10000 : 10373 ‡ 1
        373 : 10000 ‡ 26
               746
              2540
              2238
               302 : 373 ‡ 1
                      71 : 302 ‡ 4
                           284
                            18 : 71 ‡ 3
                                 54
                                 17 : 18 ‡ 1
                                      1
```

| | 1, | 26, | 1, | 4, | 3, | 1, |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{26}{27}$ | $\frac{27}{28}$ | $\frac{134}{139}$ | $\frac{429}{445}$ | $\frac{563}{584}$ |

Anmerk. Diese Begriffe der zusammenhängenden Brüche werden hier nur angeführt, weil sie später in der Zahlenlehre selbst gebraucht werden.

## §. 25.

### Von benannten Zahlen.

1) Jede Ziffer zeigt die Menge der Einheiten oder die Menge der Theile der Einheit an; wird nun bei einer

Zahl ausdrücklich noch angegeben, was für eine Art Einheiten oder Theile der Einheit verstanden werden soll: so heißt ein solcher Zahlausdruck eine benannte Zahl. Z. B. 3 Thlr.; $\frac{3}{4}$ Fuß; $\frac{1}{2}$ Acker.

2) Die Einheit einer Benennung wird, sowohl im gemeinen Leben als in Wissenschaften und Künsten, sehr oft wieder in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zerlegt gedacht, und ein solcher Theil bekommt dann als Einheit eine neue Benennung. Wie viel aber in je einem Falle Einheiten einer Benennung auf eine Einheit der nächst höheren Benennung gehen, das muß man aus dem Leben oder der Kunst und Wissenschaft selbst wissen oder zu erfahren suchen, oder man muß dieses in besonders über diesen Gegenstand erschienenen Schriften nachsehen. Die gewöhnlichsten Benennungen sind im gemeinen Leben die der Zeit, der Maße und Gewichte, so wie der Geldsorten.

3) Um eine gegebene benannte Zahl auf den kleineren Namen zu bringen, wird die Ziffer eines solchen Zahlausdrucks mit derjenigen Zahl multiplicirt, welche die Theile des nächst niederen Namens anzeigt.

$\frac{1}{4}$ Thlr. $= \frac{1}{4} \cdot 24$ gl. $= 6$ gl. $= 6 \cdot 12$ pf. $= 72$ pf.;
3 Fuß $= 3 \cdot 12$ Zoll $= 36$ Zoll $= 36 \cdot 12$ Linien;
$\frac{1}{2}$ Grad $= \frac{1}{2} \cdot 60$ Min. $= 30$ M. $= 30 \cdot 60$ S. $= 1800$ Sek.;
0,014 Acker Sächs. $= 0{,}014 \cdot 300$ □R. $= 4{,}2$ □R.

4) Eine gegebene benannte Zahl wird dadurch auf einen nächst höheren Namen gebracht, daß man sie dividirt durch die Zahl der Einheiten, die auf einen größeren Namen gehen.

18 pf. $= \frac{18}{12}$ gl. $= 1\frac{1}{2}$ gl. $= \frac{1\frac{1}{2}}{24}$ Thlr. $= \frac{1}{16}$ Thlr.
6 Zoll $= \frac{6}{12}$ Fuß $= \frac{\frac{1}{2}}{12}$ Ruthen $= \frac{1}{24}$ Ruthe.
1 Stunde $= \frac{1}{24}$ Tag $= \frac{1}{24 \cdot 365}$ Jahr $= 0{,}000114155 \cdots$ Jahre.

5) Gleichbenannte Zahlen können addirt und subtrahirt werden wie unbenannte Zahlen, nur daß die Summe und der Rest den gleichen Namen behält.

3 Thlr. — 2 Thlr. = 1 Thlr.; 12 Fuß + 7 Fuß = 19 Fuß;
12 Klafter + $5\frac{1}{2}$ Klafter = $17\frac{1}{2}$ Klafter;
1,78 □R. — 1,3 □R. = 0,48 □R.

6) Zwei ungleich benannte Zahlen werden vor der Addition oder Subtraktion auf einerlei Namen gebracht, und dann erst addirt oder subtrahirt, wenn man sie nicht in ihren ursprünglichen Namen mit dem gehörigen Vorzeichen neben einander setzen will.

3 Thlr. + 4 gl. = 76 gl. = $3\frac{1}{6}$ Thlr.
$7^{c'} - 104^{c''} = 1728 \cdot 7^{c''} - 104^{c''} = 11992^{c''}$.

§. 26.

Rechnungen mit mehrnamigen (benannten) Zahlen.

1) Sollen mehrnamige Zahlen zu einander addirt werden, so schreibt man die gleichnamigen unter einander, und zählt solche als Dinge von einerlei Art zusammen; dabei wird aber jede Menge, die eine Einheit des nächst höheren Namens ausmacht, als Einheit dieses höheren Namens aufgeführt.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 Thlr. | 14 gl. | 6 pf. | 16 Grade | 20 Minuten | 10 Sekunden |
| 5 " | 12 " | 10 " | 4 " | 50 " | 30 " |
| 9 Thlr. | 3 gl. | 4 pf. | 21 Grade | 10 Minuten | 40 Sekunden. |

2) Um mehrnamige Zahlen zu subtrahiren, schreibt man ebenfalls die zu subtrahirenden Größen unter die gleichnamigen, und subtrahirt dann die gleichnamigen Zahlen von einander. Am bequemsten ist's, man fängt beim niedrigsten Namen an, und borgt, wo es fehlt, eine Einheit beim nächst höheren Namen.

8 Thlr. 4 gl. 6 pf. weniger
3 ⸗ 12 ⸗ 10 ⸗; Unterschied
4 Thlr. 15 gl. 8 pf.

4 Grade 30 Minuten 12 Sekunden, weniger
1 ⸗ 45 ⸗ 30 ⸗ ; Unterschied
2 Grade 44 Minuten 42 Sekunden.

3) Um eine mehrnamige Zahl mit einer unbenannten Zahl zu multipliciren, wird jede benannte Größe, von der niedrigsten an, mit dieser Zahl multiplicirt, und vom einzelnen Produkte werden jedesmal die Einheiten des höheren Namens zum nächst höheren Namen gerechnet, und nur diejenigen Einheiten dieses Namens beibehalten, die noch kein Ganzes des höheren Namens ausmachen.

(3 Thlr. 12 gl. 4 pf.) mal 5 giebt
17 Thlr. 13 gl. 8 pf.

4 Fuß 3 Zoll Werkmaß mal 20 giebt
85 Fuß —

4) Mehrnamige Größen werden mit einer unbenannten Zahl dadurch dividirt, daß man jeden einzelnen Werth, vom höchsten an, dividirt mit dieser Zahl, und den etwa bleibenden Rest auf den nächst kleineren Namen bringt, und die Summe aus diesem Reste und dem Werthe dieses Namens eben so dividirt. Jeder Quotient erhält den Namen, den die zu dividirende Zahl vorher hatte.

4:) 5 Thlr. 8 gl. 6 pf.
1 Thlr. 8 gl. $1\frac{1}{2}$ pf.

(30 Acker Sächs. 104 □R.) : 12 = 2 Acker $158\frac{2}{3}$ □R.

Anmerk. Zur Vergleichung könnte man auch mehrnamige Zahlen auf einen Namen, entweder den größten oder den kleinsten, bringen, dann die Rechnung mit dieser einzigen Größe befriedigen, und hernach

die verschiedenen Namen nach dem vorigen §. wieder herstellen.

## §. 27.

### Von mehrnamigen (allgemeinen) Größen.

Bei den Rechnungen mit mehrnamigen Größen hat man jeden Zahlausdruck mit seinem Vorzeichen als ein Ganzes anzusehen, so daß man keine Veränderung mit einer Zahl, sie sey eine Ziffer, oder benannte oder allgemeine Zahl, vornehmen darf, ohne Berücksichtigung dieses Vorzeichens. Die Uebersicht und die Sicherheit der Rechnung wird erleichtert, wenn man vor einer Rechnung die Glieder einer mehrnamigen Größe nach einer bestimmten Rücksicht ordnet, d. h. theils die allgemeinen Glieder so auf einander folgen läßt, wie die Stabenordnung es mit sich bringt, theils wie die Exponenten einer Zahl wachsen oder abnehmen, theils wie die Werthe bestimmter Zahlausdrücke der Natur der Sache nach auf einander folgen.

$b^2 + 3a^2b - 2c + 2ab + a - a^3$ giebt geordnet:

$$3a^2b + 2ab - a^3 + a + b^2 - 2c.$$

## §. 28.

### Rechnungen mit mehrnamigen (allgemeinen) Größen.

1) Mehrnamige Größen werden addirt, indem man die geordneten Glieder so unter einander setzt, daß die gleichnamigen, mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen, zusammengezählt eine Summe geben, und daß man aus diesen einzelnen Summen die ganze Summe bildet.

$(b + 8a + c - b + 2a + 3d) + (5b + 2d - 3a + 12 +$
$+ 7c - 2d - 6b - 2c)$ giebt geordnet:

$$\left.\begin{array}{r} 8a + b \\ 2a - b + c + 3d \\ -3a + 5b + 7c + 2d \\ -6b - 2c - 2d + 12 \end{array}\right\} \text{giebt zur Summe:}$$

$$\overline{7a - b + 6c + 3d + 12;}$$

$$(\tfrac{3}{4}a + \tfrac{1}{2}b - c) + (\tfrac{2}{3}a - \tfrac{1}{4}b - \tfrac{1}{3}c + 8) = \tfrac{17}{12}a + \tfrac{1}{4}b - \tfrac{4}{3}c + 8;$$

12 Thlr. — 20 gl. + 4 pf. = 11 Thlr. 4 gl. 4 pf.
5 Thlr. + 12 gl. — 6 pf. = 5 Thlr. 11 gl. 6 pf.

17 Thlr. — 8 gl. — 2 pf. = 16 Thlr. 15 gl. 10 pf.

2) **Mehrnamige Größen werden subtrahirt**, wenn man die Vorzeichen aller der Glieder, die subtrahirt werden sollen, in die entgegengesetzten verwandelt, und dann wie vorhin addirt.

$(a + b) - (a - b)$ giebt geordnet

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ - \;\; + \\ \hline \end{array}$$

und der Unterschied ist $= 2b$;

$(5a - 6b + 6ab - c) - (4ab - 7c + 3a - b)$ giebt geordnet:

$$\begin{array}{l} 6ab + 5a - 6b - c \\ 4ab + 3a - b - 7c; \text{ und Unterschied} \\ - \quad - \quad + \quad + \\ \hline 2ab + 2a - 5b + 6c; \end{array}$$

6 Thlr. — 4 gl. — 8 pf. = 5 Thlr. 19 gl. 4 pf.; subtrahirt
4 Thlr. + 6 gl. — 2 pf. = 4 Thlr. 5 gl. 10 pf.; Unterschied
— — +

2 Thlr. — 10 gl. — 6 pf. = 1 Thlr. 13 gl. 6 pf.

3) **Bei der Multiplikation mehrnamiger Größen** wird jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des andern Faktors multiplicirt, dann erhält jedes dadurch entstandene Produkt bei gleichen Vorzeichen +

und bei verschiedenen — (§. 19. 6.); und endlich wird die Summe dieser Produkte für das Produkt der multiplicirten Größen gesetzt.

$(3a + 2b - 3c) \,.\, (a - b)$ giebt:

$$\begin{array}{rrrrr} 3a & + 2b & - 3c & & \\ a & - b & & & \\ \hline 3a^2 & + 2ab & - 3ac & & \\ & - 3ab & & - 2b^2 & + 3bc \\ \hline \end{array}$$

zum Produkt $= 3a^2 - ab - 3ac - 2b^2 + 3bc$;

$(a - b) \,.\, (a + b) = a^2 - b^2$;

$(5a - 3b) \,.\, (3a + 4b) = 15a^2 + 11ab - 12b^2$;

$(x^2 + 3x - 4) \,.\, (2x + 5) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 20$;

(6 Thlr. — 8 gl.) . (8 — 5) = (5 Thlr. 16 gl.) . 3 = 17 Thlr.

4) Bei der Division mehrnamiger Größen verfährt man auf folgende Weise, nachdem man den Theiler und die zu dividirende Zahl nach einerlei Rücksicht geordnet hat:

a) Man dividirt mit dem ersten Gliede des Theilers in das erste Glied der zu dividirenden Zahl, und giebt dem dadurch gefundenen Quotienten zum Vorzeichen + oder —, je nachdem die gebrauchten Glieder gleiche oder verschiedene Vorzeichen hatten (§. 19. 7.);

b) mit dem so gefundenen Quotienten multiplicirt man alle Glieder des Theilers, und subtrahirt dieses Produkt von den Gliedern der zu dividirenden Größe; und

c) man wiederholt dieses Verfahren so oft, als es angeht; bleibt zuletzt ein Rest, so wird dieser als Zähler eines Bruchs, der den Theiler zum Nenner hat, dem Quotienten beigefügt. Man dividire mit

$(a-b)$ in $(3a^2 - ab - 3ac - 2b^2 + 3bc)$ giebt $3a + 2b - 3c$;

$$\begin{array}{llll}
3a^2 - 3ab & & & \\
- \quad + & & & \\
\hline
& +2ab - 3ac & -2b^2 & +3bc \\
& +2ab & -2b^2 & \\
& - & + & \\
\hline
& -3ac & & +3bc \\
& -3ac & & +3bc \\
& + & & - \\
\hline
& * & & *
\end{array}$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2;$$

$$\frac{4a^2 - ab + 2a - 3b^2 + 5b - 2}{4a + 3b - 2} = a - b + 1;$$

$$\frac{\frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - 8x + 9}{\frac{1}{2}x - 1} = 3x^2 + \frac{7}{2}x - 9.$$

Zusatz. Ist eine zu dividirende Zahl kein Produkt aus zwei Faktoren, wovon der Theiler der eine Faktor wäre: so bleibt ein Rest, mit dem man die Division so lange fortsetzen kann, bis der Rest als unbedeutend an Werth weggelassen werden kann. Bei solchen Divisionen schreitet oft der Quotient nach einem leicht erkennbaren Gesetze fort.

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{b^2c}{aaa} + \frac{b^3c}{aaaa} \dots$$

$$\frac{1}{1+b} = 1 - b + b^2 - b^3 + b^4 - b^5 \dots$$

Anmerk. Wenn in den Beispielen dieses §. die Buchstaben folgende Werthe hätten, nämlich $a = 4$, $b = 6$, $c = 10$, $d = 5$ und $x = 2$; was würde je eine mehrnamige Größe für einen Werth in Ziffern haben? — Dieses Umwandeln der Buchstabenwerthe mehrnamiger Größen in besondere Zahlenwerthe muß man flei-

ßig geübt haben, wenn man weiterhin mit Sicherheit nach Formeln rechnen, und so den Vortheil des algebraischen Rechnens sich aneignen will.

## §. 29.

### Von Quadratzahlen.

1) Aus einer zwei- und mehrtheiligen Größe entsteht ihre zweite Potenz, oder ihre Quadratzahl, dadurch, daß man sie mit sich selbst multiplicirt (§. 10.).

2) Die Quadratzahl einer zweitheiligen Größe besteht aus den Quadratzahlen des ersten und zweiten Theils und aus dem doppelten Produkte der beiden Theile. Ist nämlich der erste Theil $= a$, und der zweite $= b$, und die zweitheilige Größe $= a + b$, so ist auch

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Jede bestimmte Zahl für $a + b$ gesetzt, und diesen Satz befriedigt, giebt den bestimmten Werth für die Quadratzahl; es sei nämlich $a + b = 46$, also $a = 40$ und $b = 6$, so ist auch

$$\begin{aligned} a^2 &= 1600 \\ 2ab &= 480 \\ b^2 &= 36 \\ \hline (a + b)^2 &= 2116 = 46^2. \end{aligned}$$

3) Die Quadratzahl einer vieltheiligen Größe enthält die Quadratzahlen aller Theile, und überdieß noch die Produkte der Summen aller ersten Theile in jeden nächst folgenden Theil zweimal genommen.

Kommt nämlich zur zweitheiligen Zahl $a + b$ ein neuer Theil $c$ hinzu, so setze man $A = (a + b)$ und $B = c$, und es ist dann

$$\begin{aligned} A^2 &= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ 2AB &= 2(a + b)c \text{ und} \\ B^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Wird zu dieser dreitheiligen Größe noch ein vierter Theil d gesetzt, und nimmt man nunmehr $A = a + b + c$ und $B = d$, so wird seyn

$A^2 = (a + b + c)^2$, was man aus dem vorigen hat;

$2AB = 2(a + b + c)d$, und

$B = d^2$.

4) Wird demnach eine Zahl um einen neuen Theil vermehrt, so kommt zu ihrer Quadratzahl noch ein doppeltes Produkt aus der Summe aller vorhergehenden Theile in den neuen Theil, nebst der Quadratzahl des neuen Theils. Mithin läßt sich auch jede vieltheilige Zahl als eine zweitheilige ansehen, so daß der erste Theil dieser Zahl besteht aus der Summe aller vorhergehenden Theile, und der zweite Theil aus dem letzten Gliede derselben. Dazu wäre das Schema folgendes:

$$a^2$$
$$+ 2ab + b^2$$
$$+ 2(a + b) . c + c^2$$
$$+ 2(a + b + c) . d + d^2$$
$$+ 2(a + b + c + d) . e + e^2$$
$$+ 2(a + b + c + d + e) . f + f^2 \text{ u. s. w.}$$

5) Ist eine Zahl in bestimmten Ziffern ausgedrückt, so folgt aus der Natur unseres Zahlsystems:

a) daß jede einziffrige Zahl zur Quadratzahl höchstens zwei Ziffern haben kann; $9^2 = 81$;

b) daß jede mehrziffrige Zahl zur Quadratzahl höchstens so viel Paare von Stellen haben kann, als die Zahl ziffrig ist; $999^2 = 998001$; $101^2 = 10201$.

6) Die Quadratzahl eines ordentlichen Bruchs ist immer wieder ein Bruch.

## §. 30.

### Von Ausziehung der Quadratwurzel.

1) Wenn eine Zahl ein wirkliches Produkt aus zwei gleichen Faktoren ist, so heißt ein solcher Faktor die Quadratwurzel jener Quadratzahl (§. 11.); und die Quadratwurzel aus einer Zahl ausziehen heißt, eine Zahl finden, die mit sich selbst multiplicirt jene Zahl giebt. Ist die gegebene Zahl selbst keine zweite Potenz, sondern wird sie nur so vorgestellt, so heißt die Quadratwurzel ausziehen nur, sich dem Werthe der gedachten Wurzel so weit nähern, daß das Fehlende für den gegebenen Fall als unbedeutend erscheint.

$$\sqrt{16} = 4;\quad \sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$$

2) Ist eine Quadratzahl aus einer zweitheiligen Größe entstanden, und man nimmt allmählig von ihr weg: das Quadrat des ersten Theils, dann das doppelte Produkt beider Theile, und auch das Quadrat des zweiten Theils; so muß Null übrig bleiben. Ist z. B. $2916 = (54)^2$; also $a = 50$ und $b = 4$, so ist auch

$$\begin{aligned} a^2 &= 2500 \\ 2ab &= 400 \\ b^2 &= 16 \\ \hline 2916 - 2916 &= 0. \end{aligned}$$

3) Wenn eine Quadratzahl aus einer mehrtheiligen Wurzel entstanden ist, so muß ebenfalls Null bleiben, wenn man die Werthe dieser mehrtheiligen Größen für die Quadratzahl allmählig von dieser wegnimmt (§. 29. 4.).

4) Die Quadratwurzel aus einem Bruche ist ebenfalls ein Bruch.

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Die Quadratwurzel aus Brüchen wird meist leichter gefunden, wenn man die Brüche in zehntheilige verwandelt, und dann jene auszieht.

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0{,}6} = 0{,}77459\ldots$$

5) Die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Zahl, die keine zweite Potenz ist, giebt keine vollkommen genaue, sondern nur eine irrationale Zahl. $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$.

6) Die Probe wird dadurch gemacht, daß man die Quadratwurzel in die zweite Potenz erhebt, und diese, addirt zum gebliebenen Reste, gleich der gegebenen Zahl findet.

Aufgabe I. Die Quadratwurzel aus einer mehrziffrigen ganzen Zahl auszuziehen.

α) Man theile die gegebene Zahl, von den Einern an, in Klassen zu je zwei Ziffern, so daß bei ungerader Zahl der Ziffern für die letzte Klasse nur eine Ziffer übrig bleibt. Dann bekommt die Quadratwurzel so viele Stellen, als die eingetheilte Quadratzahl Klassen gab (§. 29. 5.). Diese Stellen mit ihren Ziffern in der Quadratwurzel nenne man der Ordnung nach a, b, c, d u. s. w.

β) Hierauf nimmt man den Werth der Ziffer für a so groß an, daß sich ihre Quadratzahl $= a^2$ von den Ziffern der höchsten Klasse noch abziehen läßt. Zu dem dadurch gebliebenen Reste setzt man die zwei Ziffern der folgenden Klasse, schreibt den Werth von 2a so unter das Ganze, daß der Einer von 2a unter die erste zum Reste gezogene Ziffer zu stehen kommt, und dividirt mit 2a in die nun über ihr stehende Zahl, so ist der Quotient $=$ b in der Wurzel.

Diesen Werth der Wurzel b schreibt man zu dem von 2a unter die zweite zum Reste gezogene Ziffer, multiplicirt die dadurch entstandene Summe $= 2a + b$ noch mit b, und subtrahirt dieses Produkt $= 2ab + b^2$ von der über ihr stehenden Zahl.

$\gamma$) Mit dem dadurch erhaltenen Reste verfährt man gerade wieder wie vorhin — und setzt dieses Verfahren bis zu Ende fort.

$\delta$) Würde sich ein Produkt wie $2ab + b^2$ nicht abziehen lassen, so müßte man jedesmal die gebrauchte Ziffer in der Wurzel um 1 vermindern.

$\varepsilon$) Würde bei der Division, mit der bisherigen Wurzel doppelt genommen, zum Quotienten Null kommen, so ist auch die Stelle in der Wurzel mit Null auszufüllen, und also auch Null zu subtrahiren.

$\zeta$) Bleibt bei der letzten Klasse noch ein Rest übrig, so war die Zahl selbst, aus welcher die Quadratwurzel ausgezogen wurde, keine vollkommene Quadratzahl, und es muß die gefundene Wurzel in der zweiten Potenz, addirt zum Reste, erst gleich der Quadratzahl seyn.

$\eta$) Ist kein Rest bei einer Klasse geblieben, und die folgenden Klassen enthalten auch blose Nullen, so wird für jede folgende Klasse eine Null an die Wurzel gesetzt.

$$\sqrt{13|69} \doteq \overset{ab}{37}$$

$$\begin{array}{r} a^2 = \underline{9} \\ 469 \\ (2a + b) = (67) \\ 2ab + b^2 = \underline{469} \\ 0 \end{array}$$

$$\sqrt{}\,2|04|49 \ddagger 100 = a$$
$$a^2 = 1|00|00 \qquad 40 = b$$
$$10449 \qquad 3 = c$$
$$(2a + b) = (240) \qquad 143$$
$$2ab + b^2 = 9600$$
$$849$$
$$2(a + b) + c = (283)$$
$$2(a + b)c + c^2 = 849$$
$$0$$

$$\sqrt{}\,5|83|70|56 \ddagger \overset{abcd}{2416}$$
$$a^2 = 4$$
$$183$$
$$(2a + b) = (44)$$
$$2ab + b^2 = 176$$
$$770$$
$$2(a + b) + c = (481)$$
$$2(a + b)c + c^2 = 481$$
$$28956$$
$$2(a + b + c) + d = (4826)$$
$$2(a + b + c)d + d^2 = 28956$$
$$0$$

**Aufgabe II.** Aus einem zehntheiligen Bruche die Quadratwurzel auszuziehen. $\sqrt{}\,0{,}47839$.

Von dem Einerzeichen an theilt man den Bruch in so viele Klassen zu zwei Ziffern, als nämlich die Quadratwurzel Stellen haben soll. Sollte dazu der zehntheilige Bruch nicht Stellen genug haben, so ergänzt man sie durch Anhängung von Nullen.

Hat man nun in der Quadratwurzel die Stelle der Einer mit Null und dem Einerzeichen bemerkt, so zieht man nun aus den Klassen so die Quadratwurzel, als wäre die gegebene Zahl eine ganze Zahl und kein Bruch

gewesen. Soll daher aus obiger Zahl die Quadratwurzel 4 Stellen haben, so ist:

$$\sqrt{0,|47|83|90|00} = 0,\overset{a}{6}\overset{b}{9}\overset{c}{1}\overset{d}{6}\ldots$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = & 36 \\
\hline
 & 1183 \\
(2a + b) = & (129) \\
2ab + b^2 = & 1161 \\
\hline
 & 2290 \\
2(a+b)+c = & (1381) \\
2(a+b)c+c^2 = & 1381 \\
\hline
 & 90900 \\
2(a+b+c)+d = & (13826) \\
2(a+b+c)d+d^2 = & 82956 \\
\hline
 & 7944
\end{array}$$

**Aufgabe III.** Aus einem ordentlichen in Ziffern ausgedrückten Bruche die Quadratwurzel auszuziehen.

Man ziehe die Quadratwurzel aus dem Zähler als einer ganzen Zahl (nach der Aufgabe I.), und eben so auch aus dem Nenner; oder man verwandle den Bruch in einen zehntheiligen, und ziehe daraus die Quadratwurzel (nach der Aufgabe II.). Z. B.

$$\sqrt{\frac{4}{7}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{2,6457\ldots} = \sqrt{0,57142857\ldots} = 0,75592\ldots$$

**Aufgabe IV.** Aus einer in Ziffern ausgedrückten ganzen Zahl, verbunden mit einem zehntheiligen Bruche, die Quadratwurzel auszuziehen.

Von dem Einerzeichen an theilt man rechts und links die gegebenen Zahlstellen in Klassen zu zwei Ziffern, und wenn für die letzte Klasse des Bruchs eine Stelle fehlt, so füllt man diese mit Null aus; hierauf zieht man aus den Klassen der ganzen Zahl die Quadratwurzel aus, wie

oben bei der Aufgabe I. angegeben ward; dann macht man in der gefundenen Wurzel das Einerzeichen, und zieht aus dem gebliebenen Reste und der nächsten Klasse die entsprechende Wurzel, und fährt damit fort, als wenn es ganze Stellen wären, wie bei der Aufgabe II. gezeigt wurde. Z. B.

$$\sqrt{3|75,|85|57|69} = \overset{a\,b\ \ c\,d\,e}{19,387};$$

$$
\begin{aligned}
a^2 &= 1 \\
&\overline{\quad 275} \\
(2a+b) &= (29) \\
2ab+b^2 &= 261 \\
&\overline{\quad 14\,85} \\
2(a+b)+c &= (3\,83) \\
2(a+b)c+c^2 &= 11\,49 \\
&\overline{\quad 3\,36\,57} \\
2(a+b+c)+d &= (38\,68) \\
2(a+b+c)d+d^2 &= 3\,09\,44 \\
&\overline{\quad 27\,13\,69} \\
2(a+b+c+d)+e &= (3\,87\,67) \\
2(a+b+c+d)e+e^2 &= 27\,13\,69 \\
&\overline{\quad 0}
\end{aligned}
$$

$$\sqrt{146,35} = 12,0975\ldots$$

**Aufgabe V.** Die Quadratwurzel aus einer mehrnamigen allgemeinen Größe auszuziehen.

Die gegebene Größe wird geordnet, und zwar so, daß wo möglich das erste Glied eine Quadratzahl ist; dann verfährt man so wie bei ganzen Zahlen, nur daß hier keine Klassen-Eintheilung stattfinden kann. Hat man nämlich den Werth für $a^2$ abgezogen, so dividirt man mit dem Werthe von $2a$ in ein Glied des ganzen Restes, addirt diesen Quotienten $= b$ zum Werthe von $2a$, multiplicirt diesen Werth $= 2a + b$ mit der neuen Wurzel $= b$, und subtrahirt dieses Produkt von der ganzen noch

übrigen Zahl. In den dadurch gebliebenen Rest dividirt man nun mit dem Werthe von $2(a+b)$ und findet zum Quotienten die neue Wurzelgröße $= c$, und verfährt wieder wie vorhin. Dieses Verfahren setzt man so lange fort, bis zum Reste Null bleibt, oder dieser Rest als unbedeutend weggelassen werden kann.

$$\sqrt{(x^4-2x^3+3x^2-2x+1)} = \overset{a}{\widehat{x^2}} - \overset{b}{\widehat{x}} + \overset{c}{\widehat{1}}$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = & x^4 \\ \hline
 & -2x^3+3x^2-2x+1 \\
(2a+b) = & (2x^2-x) \\
2ab+b^2 = & -2x^3+x^2 \\
 & \;\;+\;\;\;\;\;\;- \\ \hline
 & +2x^2-2x+1 \\
2(a+b)+c = & (2x^2-2x+1) \\
2(a+b)c+c^2 = & 2x^2-2x+1 \\
 & -\;\;\;+\;\;\;- \\ \hline
 & *
\end{array}$$

$$\sqrt{\left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)} = \overset{a}{\widehat{x}} - \overset{b}{\widehat{\frac{y}{2}}}$$

$$\begin{array}{rl}
a^2 = & x^2 \\ \hline
 & -xy+\frac{y^2}{4} \\
(2a+b) = & \left(2x-\frac{y}{2}\right) \\
2ab+b^2 = & -2xy+\frac{y^2}{4} \\
 & \;\;+\;\;\;\;\;\;- \\ \hline
 & *
\end{array}$$

$$\sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{x^4+4ax^2+4a^2}} = \frac{a-b}{x^2+2a};$$

$$\sqrt{(1+x)} = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\ldots;$$

$$\sqrt{(1-x)} = 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}-\ldots;$$

## §. 31.

### Von Kubikzahlen.

1) Wenn eine Zahl in die dritte Potenz erhoben wird, so nennt man gemeinhin die dadurch erhaltene Zahl eine Kubikzahl, oder auch einen Würfel. $4^3 = 64$.

2) Die Kubikzahl einer zweitheiligen Größe besteht aber aus den Würfeln der beiden Theile und aus dem dreifachen Produkte jedes Theils in das Quadrat des anderen Theils. Ist nämlich der erste Theil einer Größe $= a$ und der zweite $= b$ und die Größe selbst $= a + b$; so ist auch $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Jede Zahl für a und b gesetzt und dieses Gesetz befriedigt muß auch die Kubikzahl geben; es sey nämlich $a = 30$ und $b = 4$, also $a + b = 34$, so ist auch

$$\begin{array}{rl} a^3 & = 27000 \\ 3a^2b & = 10800 \\ 3ab^2 & = \phantom{0}1440 \\ b^3 & = \phantom{000}64 \\ \hline (a+b)^3 & = 39304 = 34^3. \end{array}$$

3) Die Kubikzahl einer vieltheiligen Größe enthält die Würfel aller Theile und noch die dreifachen Produkte sowohl aus den Summen aller vorhergehenden Theile im Quadrate mal dem neuen Theile, als auch aus den Summen aller vorhergehenden Theile und dem Quadrate des neuen Theils.

Kommt nämlich zu den beiden ersten Theilen $a + b$ noch ein neuer Theil c hinzu, so setze man nur $A = a + b$ und $B = c$, und es ist dann

$$\begin{array}{rl} A^3 & = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ 3A^2B & = 3(a+b)^2 \, . \, c \\ 3AB^2 & = 3(a+b) \, . \, c^2 \\ B^3 & = c^3. \end{array}$$

Wenn wieder ein neuer Theil d hinzu kommt, und man wieder $A = (a + b + c)$ und $B = d$ setzt, so ist

$A^3 = (a + b + c)^3$ aus dem vorigen bekannt;

$3A^2B = 3(a + b + c)^2 . d$

$3AB^2 = 3(a + b + c) . d^2$

und $B^3 = d^3$.

Danach entsteht folgendes Schema für die Würfelzahl einer mehrtheiligen Größe:

$$a^3$$
$$+ 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$+ 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$
$$+ 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3$$
$$+ 3(a+b+c+d)^2e + 3(a+b+c+d)e^2 + e^3$$
$$+ 3(a+b+\ldots)^2n + 3(a+b+\ldots)n^2 + n^3.$$

4) Ist aber eine Zahl in unseren Ziffern ausgedrückt, so folgt aus unserem Zahlsysteme für die Würfelzahlen:

a) daß die größte einziffrige Zahl im Würfel höchstens drei Stellen hat; $9^3 = 729$;

b) daß jede mehrziffrige Zahl im Würfel höchstens so viele Klassen zu drei Ziffern haben kann, als die Zahl ziffrig ist.

c) Der Würfel eines ordentlichen Bruchs ist ebenfalls ein Bruch.

## §. 32.

### Von Ausziehung der Kubikwurzel.

1) Ist eine Zahl ein Produkt aus drei gleichen Faktoren, also eine Kubikzahl, so heißt das Verfahren, wie man aus der Kubikzahl jenen Faktor findet, das Ausziehen der Kubikwurzel (§. 11.). Ist aber eine Zahl, aus der die Kubikwurzel ausgezogen werden soll, nicht eine

dritte Potenz, sondern wird sie nur so vorgestellt: so wird auch für die Kubikwurzel nur eine Zahl gefunden werden können, die, in die dritte Potenz erhoben, dem Werthe der Kubikzahl ziemlich nahe kommt.

$$\sqrt[3]{64} = 4; \quad \sqrt[3]{12} = 2{,}28942\ldots;$$

2) Ist eine Kubikzahl aus einer zweitheiligen Größe entstanden, so muß von ihr Null übrig bleiben, wenn man von ihr wegnimmt die Würfel des ersten und zweiten Theils der Wurzel, und überdieß noch die dreifachen Produkte jedes Theils in das Quadrat des anderen Theils.

3) War aber die Kubikzahl aus einer mehrtheiligen Wurzel entstanden, so muß ebenfalls Null übrig bleiben, wenn man alle die Werthe von ihr wegnimmt, aus denen (nach §. 31. 3.) eine Kubikzahl von eben so viel Wurzeltheilen gebildet wird.

4) Die Kubikwurzel aus Brüchen ist gleich der Kubikwurzel aus dem Zähler getheilt durch die Kubikwurzel des Nenners.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}.$$

Bequem ist es meist, den ordentlichen Bruch in einen zehntheiligen zu verwandeln, und dann aus diesem die Kubikwurzel auszuziehen.

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{0{,}216} = 0{,}6.$$

5) Die Ausziehung der Kubikwurzel aus einer Zahl, die keine dritte Potenz ist, giebt ebenfalls eine irrationale Zahl.

$$\sqrt[3]{6}; \quad \sqrt[3]{7}.$$

6) Die Probe, ob man richtig gerechnet habe, ist das Erheben der gefundenen Kubikwurzel in die dritte Potenz,

die dann der gegebenen Zahl weniger dem Reste gleich seyn muß.

Aufgabe I. Aus einer mehrziffrigen Zahl die Kubikwurzel auszuziehen.

α) Die gegebene Zahl theilt man von den Einern an in Klassen zu drei Ziffern, so daß für die letzte Klasse auch nur zwei oder eine Ziffer bleiben kann. Dann erhält die Kubikwurzel so viele Stellen, als die eingetheilte Zahl Klassen gegeben hat (§. 31. 4.). Diese Stellen in der Kubikwurzel bezeichnet man mit a, b, c u. s. w.

β) Für den ersten Theil der Wurzel a nimmt man den Werth in Ziffern so groß an, als sich nur immer $a^3$ von den Ziffern der höchsten Klasse abziehen läßt. Zu dem dadurch erhaltenen Reste setzt man die drei Ziffern der nächsten Klasse, und schreibt den Werth von $3a^2$ so unter diese Zahl, daß der Einer von $3a^2$ unter die erste zum Reste herunter gezogene Ziffer zu stehen kommt, und dividirt mit diesem Werthe von $3a^2$ in die über ihr stehende Zahl; der Quotient ist der neue Wurzeltheil $= b$. Hierauf schreibe man den Werth von $3a^2b$ unter den gebrauchten Divisor $= 3a^2$, dazu noch den Werth von $3ab^2$, aber um eine Stelle weiter zur Rechten, und eben so den Werth von $b^3$ noch um eine Stelle weiter zur Rechten gerückt; dann addire man diese drei Werthe so zusammen, wie sie eben stehen, und subtrahire diese Summe von den über ihr stehenden Ziffern der Kubikzahl.

γ) Zu dem etwa gebliebenen Reste schreibt man die drei Ziffern der nächsten Klasse, und verfährt wieder wie vorhin, nur daß jetzt immer der Werth von $3(a + b)^2$ gesetzt wird, wo vorher der von $3a^2$ stand. Dieses Verfahren wird so oft wiederholt, als noch Klassen in der Kubikzahl sind.

δ) Würde die erhaltene Summe aus den unter einander geschriebenen drei Produkten sich nicht abziehen lassen, weil sie zu groß ausgefallen wäre, so müßte die gebrauchte letzte Ziffer in der Wurzelgröße um Eins vermindert und je ein neues Produkt gebildet werden.

ε) Bleibt auch bei der letzten Klasse nach Abzug der letzten Summe ein Rest übrig, so war die gegebene Zahl keine dritte Potenz.

ζ) War der Werth des Wurzeltheils bei einer Klasse $= 0$, und die folgenden Klassen haben auch lauter Nullen, so wird der gefundenen Wurzel für jede Klasse eine Null angehängt.

$$\sqrt[3]{658|503} \ddagger \overset{a\,b}{87};$$

$$\begin{array}{rcr} a^3 & = & 512 \\ \hline & & 146\,503 \\ (3a^2) & = & (192) \\ 3a^2b & = & 1344 \\ 3ab^2 & = & 1176 \\ b^3 & = & 343 \\ \hline & & 146\,503 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{74|088} \ddagger \overset{a}{40} + \overset{b}{2} = 42;$$

$$\begin{array}{rcr} a^3 & = & 64|000 \\ \hline & & 10\,088 \\ (3a^2) & = & (4\,800) \\ 3a^2b & = & 9\,600 \\ 3ab^2 & = & 480 \\ b^3 & = & 8 \\ \hline & & 10088 \\ \hline & & 0 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{12|535|672|267} \ddagger \overset{abcd}{2323} = \overset{a}{2000} + \overset{b}{300} + \overset{c}{20} + \overset{d}{3};$$

$$\begin{array}{lr}
a^3 = & 8 \\ \hline
 & 4535 \\
(3a^2) = & (12) \\
3a^2b = & 36 \\
3ab^2 = & 54 \\
b^3 = & 27 \\ \hline
 & 4167 \\ \hline
 & 368672 \\
3(a+b)^2 = & (1587) \\
3(a+b)^2c = & 3174 \\
3(a+b)c^2 = & 276 \\
c^3 = & 8 \\ \hline
 & 320168 \\ \hline
 & 48504267 \\
3(a+b+c)^2 = & (161472) \\
3(a+b+c)^2d = & 484416 \\
3(a+b+c)d^2 = & 6264 \\
d^3 = & 27 \\ \hline
 & 48504267 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

**Aufgabe II.** Aus einem zehntheiligen Bruche die Kubikwurzel auszuziehen.

Von dem Einerzeichen an theilt man den gegebenen Bruch in so viele Klassen zu drei Ziffern, als die Kubikwurzel Stellen haben soll, und ergänzt die etwa fehlenden Stellen durch Anhängung von Nullen. Dann bezeichne man in der Kubikwurzel die Stelle der Einheit durch Null und das Einerzeichen, und ziehe dann die Kubikwurzel eben so aus der gegebenen Zahl, als ob sie eine ganze Zahl wäre.

$$\sqrt[3]{0,|189|712|900|936} = 0,\overset{abcd}{5746};$$

$$
\begin{array}{rcr}
a^3 & = & 125 \\
\hline
 & & 64712 \\
(3a^2) & = & (75) \\
3a^2b & = & 525 \\
3ab^2 & = & 735 \\
b^3 & = & 343 \\
\hline
 & & 60193 \\
\hline
 & & 4519900 \\
3(a+b)^2 & = & (9747) \\
3(a+b)^2c & = & 38988 \\
3(a+b)c^2 & = & 2736 \\
c^3 & = & 64 \\
\hline
 & & 3926224 \\
\hline
 & & 593676936 \\
3(a+b+c)^2 & = & (988428) \\
3(a+b+c)^2d & = & 5930568 \\
3(a+b+c)d^2 & = & 61992 \\
d^3 & = & 216 \\
\hline
 & & 593676936 \\
\hline
 & & 0
\end{array}
$$

$$\sqrt[3]{0,03} = 0,3107\ldots; \quad \sqrt[3]{0,27} = 0,646\ldots$$

**Aufgabe III.** Aus einem ordentlichen Bruche die Kubikwurzel auszuziehen.

Man ziehe die Kubikwurzel aus dem Zähler des Bruchs, wie aus jeder andern ganzen Zahl, nach Aufgabe I., und eben so auch aus dem Nenner desselben; dann ist die erste

Kubikwurzel der Zähler, und die zweite der Nenner eines Bruchs, als der verlangten Kubikwurzel.

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}; \ \sqrt[3]{\frac{343}{512}} = \frac{7}{8}.$$

Bequem ist's in vielen Fällen, den gegebenen ordentlichen Bruch in einen zehntheiligen Bruch zu verwandeln, und dann aus diesem nach der vorigen Aufgabe die Kubikwurzel auszuziehen.

$$\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{0{,}83333\ldots} = 0{,}94103\ldots$$

Aufgabe IV. Aus einer ganzen Zahl, verbunden mit einem zehntheiligen Bruche, die Kubikwurzel auszuziehen.

Von dem Einerzeichen an theile man rechts und links die gegebene Zahl in Klassen zu drei Ziffern, und wenn für die letzte Klasse des Bruchs eine oder zwei Stellen fehlen sollten, so fülle man diese mit Null aus. Hierauf zieht man aus den Klassen der ganzen Zahl die Kubikwurzel aus, wie oben Aufgabe I., dann bestimmt man in der bis daher gefundenen Kubikwurzel die Stelle der Einer durch Setzung des Einerzeichens, und zieht wieder aus dem gebliebenen Reste und der nächsten Klasse des zehntheiligen Bruchs das entsprechende Wurzelglied gerade so aus, als wenn es lauter ganze Stellen wären. Dieses Verfahren setzt man nun fort, wie es in der Aufgabe II. angegeben wurde.

$$\sqrt[3]{42|001,|304|200} = \overset{a\,b\,c\,d}{34,76}\ldots;$$

$$\begin{array}{rl}
a^3 = & \underline{27} \\
 & 15\,001 \\
(3a^2) = & (27) \\
3a^2b = & 108 \\
3ab^2 = & 144 \\
b^3 = & \underline{64} \\
 & \underline{12\,304} \\
 & 2\,697\,304 \\
3(a+b)^2c = & (346\,8) \\
3(a+b)^2c = & 2427\,6 \\
3(a+b)c^2 = & 49\,98 \\
c^3 = & \underline{343} \\
 & \underline{2\,477\,923} \\
 & 219\,381\,200 \\
3(a+b+c)^2 = & (36\,122\,7) \\
3(a+b+c)^2d = & 216\,736\,2 \\
3(a+b+c)d^2 = & 356\,76 \\
d^3 = & \underline{216} \\
 & \underline{217\,093\,176} \\
 & 2\,288\,024
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{3,8} = 1,56049\ldots$$

Zusatz. Ist nach der Ausziehung der Kubikwurzel aus einer ganzen Zahl noch ein Rest geblieben, so kann man das Ausziehen durch jedesmaliges Anhängen von drei Nullen beliebig fortsetzen, nur muß man vorher die Stelle der Einer durch Setzung des Einerzeichens bemerken.

$$\sqrt[3]{4} = 1,5874\ldots$$

Aufgabe V. Die Kubikwurzel aus einer allgemeinen mehrnamigen Größe auszuziehen.

Hat man die gegebene Größe geordnet, und zwar so, daß wo möglich das erste Glied ein rationales ist, dann

verfährt man wie bei in Ziffern ausgedrückten Zahlen, nur daß hier keine Klasseneintheilung stattfinden kann, und daß man hier beim Subtrahiren die gleichnamigen Ausdrücke subtrahirt, sie mögen vorn oder hinten stehen. Hat man die Glieder der Kubikwurzel wieder der Ordnung nach a, b, c, d u. s. w. benannt, und den Werth für $a^3$ vom ersten Gliede der geordneten Größe abgezogen, so ist die ganze übrige Zahl ein Rest, von dem man ein schickliches Glied dividirt durch den Werth von $3a^2$; mit dem gefundenen Quotienten $= b$ macht man nun die Produkte $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und subtrahirt diese von der noch als Rest daseyenden Größe. Nun macht man den Werth von $3(a+b)^2$, und dividirt mit dessen erstem Gliede in ein Glied des Restes, und erhält den Quotienten $= c$, womit wieder die drei Produkte $3(a+b)^2 c + {} + 3(a+b)c^2 + c^3$ gemacht und abgezogen werden. Dieses Verfahren wird nun so lange fortgesetzt, bis Null oder eine Zahl zum Reste bleibt, die man als unbedeutend weglassen kann.

$$\sqrt[3]{(64x^3 - 240x^2y + 300xy^2 - 125y^3)} = \overset{a}{\widehat{4x}} - \overset{b}{\widehat{5y}};$$

$$a^3 = 64x^3$$

$$\begin{array}{rllll}
\hline
 & -240x^2y & +300xy^2 & -125y^3 \\
(3a^2) = & (48x^2) & & \\
3a^2b = & -240x^2y & & \\
3ab^2 = & & +300xy^2 & \\
b^3 = & & & -125y^3 \\
 & + & - & + \\
\hline
 & & * & 
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{(m^6 - 6m^5 + 15m^4 - 20m^3 + 15m^2 - 6m + 1)} =$$
$$= m^2 - 2m + 1;$$

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} + \dots;$$

$$\sqrt[3]{(1-x)} = 1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81} - \frac{10x^4}{243} - \dots;$$

$$\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{81} - \frac{5}{2187} \dots$$

Zusatz. Für die nächsten Wurzeln, z. B. aus der vierten und fünften Potenz, läßt sich ein ähnliches Verfahren darstellen, wenn man $a + b$ in die entsprechende Potenz erhebt, und wieder so die Bestandtheile einer solchen Potenz entwickelt, und diese Ergebnisse auf eine gegebene Zahl anwendet. Die binomische Regel aber, nach welcher für jede Potenz eines Binoms $a + b$ auch außer der Ordnung die Werthe aller Theile gefunden werden können, läßt für ganze und positive Exponenten sich hier nur anschaulich machen, obgleich ihre Richtigkeit in der höheren Mathematik auch für gebrochene und negative Exponenten erwiesen wird. Da nämlich durch fortgesetztes Potenziren ist:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

u. s. w.

so folgt daraus:

1) daß die Glieder jeder Potenz aus a mit abnehmenden und aus b mit zunehmenden Exponenten vorkommen, nämlich

$a^n . b^0$; $a^{n-1} b^1$; $a^{n-2} b^2$; $a^{n-3} b^3$; $a^{n-4} b^4$ u. s. w. bis $a^{n-n} b^n = a^0 b^n = b^n$;

2) daß das erste und letzte Glied 1 zum Coefficienten hat, hingegen die Coefficienten der mittleren Glieder der Ordnung nach entstehen, wenn man von den Brüchen

$$\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \frac{n-2}{3}, \frac{n-3}{4}, \frac{n-4}{5} \text{ u. s. w.}$$

den ersten macht, dann das Produkt der beiden ersten nimmt, dann das Produkt der drei ersten u. s. w.; und

3) daß die allgemeine Form des Binoms (die binomische Regel) folgende ist:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n.(n-1)}{1.2} a^{n-2} b^2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3} a^{n-3} b^3 \text{ u. s. w.}$$

## §. 33.

### Von Wurzelgrößen.

1) Jeder Zahlenausdruck, der ein Wurzelzeichen von irgend einer Potenz vor sich hat, heißt eine Wurzelgröße. Solche Wurzelgrößen sind:

$$\sqrt[n]{a};\ \sqrt[n]{(a \pm b)};\ \sqrt[n]{ab};\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}};\ \sqrt[n]{a^m};\ \sqrt[n]{a^{m-1}};\ \sqrt[n]{a^{-m}}.$$

Haben die Wurzelzeichen einerlei Exponenten, so nennt man solche Größen auch Wurzelgrößen von einerlei Namen oder Benennung.

$$\sqrt[n]{a} \text{ und } \sqrt[n]{b}.$$

2) Jede Wurzelgröße läßt sich als eine Potenz ausdrücken, die dieselbe Wurzel behält und nur einen Bruch zum Exponenten bekommt, dessen Zähler unverändert der Exponent unter dem Wurzelzeichen war, und dessen Nenner der Wurzel Exponent ist (§. 20.).

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};\ \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}};\ \sqrt[2]{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2.$$

$$\sqrt[3]{a^2b^6} = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{6}{3}} = a^{\frac{2}{3}}b^2;\ \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}.$$

Umgekehrt darf man den Nenner eines Bruchexponenten weglassen, wenn man ihn als Wurzelexponent mit dem Wurzelzeichen der Potenz vorsetzt.

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2};\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};\ 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4}.$$

Zusatz. Wenn es aus §. 20. sich ergiebt, was negative Exponenten zu bedeuten haben, so ergeben sich hier die Werthe von gebrochenen Exponenten.

3) Auf einerlei Benennung werden zwei Wurzelgrößen gebracht, wenn man in jeder Wurzelgröße die beiderseitigen Exponenten multiplicirt mit dem Exponenten der anderen Wurzel.

$$\sqrt[n]{a^2} \text{ und } \sqrt[m]{b^3} \text{ giebt } \sqrt[mn]{a^{2m}} \text{ und } \sqrt[mn]{b^{3n}};$$

$$\text{oder } a^{\frac{2}{n}} \text{ und } b^{\frac{3}{m}} \text{ geben } a^{\frac{2m}{mn}} \text{ und } b^{\frac{3n}{mn}}.$$

4) Die Wurzel aus einer Zahl, die in Faktoren zerlegt werden kann, ist gleich denselben Wurzeln aus den Faktoren. Dadurch lassen sich Wurzelgrößen oft einfacher darstellen oder verkürzen.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};\ \sqrt[n]{\frac{a}{bc}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{c}};$$

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3 \cdot \sqrt{6};$$

$$\sqrt[3]{\frac{25}{54}} = \sqrt[3]{\frac{25}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{25}{2}}.$$

Anmerk. Durch diese Sätze wird die Lehre vom Rechnen mit Wurzelgrößen vorbereitet, welches Rechnen aber außerhalb des Zwecks dieser Schrift liegt. Hier kam es nur darauf an, die nachherige Lehre von den Logarithmen vorzubereiten.

5) Weil Potenzen immer vorgestellt werden müssen, als Produkte aus gleichen Faktoren, und ein Produkt positiv (+) oder negativ (—) wird, je nachdem die Vorzeichen gleich oder verschieden sind; so folgt daraus das Gesetz:

Von jeder positiven Größe sind alle Potenzen positiv; hingegen von einer negativen Größe sind die Potenzen mit geraden Exponenten positiv, aber die mit ungeraden negativ.

Darum werden aus $+ a$ die Potenzen $+ a^2$; $+ a^3$; $+ a^4$; $+ a^5 \ldots$; hingegen werden aus $- a$ die Potenzen $+ a^2$; $- a^3$; $+ a^4$; $- a^5 \ldots$

6) Jede *ungerade* Wurzel aus einer *positiven* Größe kann nur positiv, und aus einer *negativen* nur negativ seyn.

$$\sqrt[3]{27} = +3; \quad \sqrt[3]{-27} = -3.$$

7) Jede *gerade* Wurzel aus einer positiven Größe kann *positiv oder negativ*, nur nicht beides zugleich seyn, und die übrigen Rechnungumstände müssen entscheiden, welcher von diesen beiden entgegengesetzten Werthen gelten soll.

$$\sqrt{16} = +4 \text{ oder } -4; \quad \sqrt[4]{81} = +3 \text{ oder } -3.$$

8) Jede *gerade* Wurzel aus einer *negativen* Zahl ist *eine eingebildete* (imaginäre) *Größe*.

$$\sqrt[2n]{-a}; \quad \sqrt{-16}; \quad \sqrt[4]{-81}.$$

*Anmerk.* Das Rechnen mit solchen eingebildeten Größen gehört ebenfalls nicht in den Zweck dieser Schrift.

## §. 34.

### Von den Logarithmen.

1) Hat man eine Zahl a nach und nach in allerlei Potenzen erhoben, so nennt man die Exponenten für die dadurch entstandenen Potenzen Logarithmen.

Wäre z. B. $a^n = B$, so heißt n der Logarithmen für B, und man schreibt $n = \log. B$. Die Zahl aber, welche in die verschiedenen Potenzen erhoben wurde, heißt die Grundzahl. Das gemeine logarithmische System, das die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000000 aufstellt, hat 10 zur Grundzahl. Da nun bei dieser Grundzahl ist $10^3 = 1000$, so muß 3 der Logarithmen von 1000 seyn, und man schreibt: $3 = \log. 1000$.

2) Wäre in dem Zahlausdrucke $a^x = B$ sowohl die Zahl a, als auch die Zahl B bekannt, so muß sich x bestimmen lassen durch folgende zwei Fälle.

I. Entweder die Zahl B ist wirklich durch das Potenziren aus a entstanden, und dann erhebt man die Zahl a nach und nach zu ihren Potenzen, und gelangt so einmal zu einer Potenz (von a), die gleich B ist, und x ist nunmehr der dadurch bekannt gewordene Exponent dieser Potenz. Wäre z. B.

$2^x = 128$; also $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$;
$2^5 = 32$; $2^6 = 64$; $2^7 = 128$; folglich $x = 7$.

Anmerk. Zur Erleichterung des öfteren Potenzirens mit gewissen Zahlen, hat man eigene Potenztafeln aufgestellt.

II. Oder die Zahl B ist nicht gleich einer vollkommenen Potenz aus a, und dann muß der Exponent x gleich seyn dem nächst kleineren Exponenten m nebst einem Bruche, der auf folgende Weise bestimmt werden kann:

Mit der nächst niederen Potenz $a^m$ dividirt man in die Potenz B, also $\frac{B}{a^m} = Q$ dem Quotienten; dann eben so mit $Q^n$ in die vorhergehende Wurzel a der Potenz $a^m$; nämlich $\frac{a}{Q^n} = R$, und setzt dieses Dividiren mit einer Potenz des letzten Quotienten in die Wurzel der Potenz des vorhergehenden Theilers so lange fort, bis ein Quotient = 1 wird, oder bis die Werthe der Quotienten für einen besonderen Rechnungfall als unbedeutend angesehen werden können. Die auf den Exponenten m folgenden Exponenten der als Theiler gebrauchten Potenzen geben einen zusammenhängenden Bruch (§. 24.), welcher zum Exponenten m addirt werden muß, um den Werth für x zu finden, nämlich

$$x = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{o + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q \cdots}}}}$$

Wäre $256^x = 134217728$, so ist

$\frac{134217728}{256^3} = \frac{134217728}{16777216} = 8$; nächst niederer Exponent = 3;

$\frac{256}{8^2} = \frac{256}{64} = 4$; erster Bruchexponent = 2;

$\frac{8}{4^1} = \frac{8}{4} = 2$; zweiter Bruchexponent = 1;

$\frac{4}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$; dritter Bruchexponent = 2;

$$\text{also } x = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

oder $x = 3\frac{3}{8}$; und mithin

$$256^{3\frac{3}{8}} = 256^{\frac{27}{8}} = \sqrt[8]{256^{27}} = 134217728.$$

3) Von jeder angenommenen Grundzahl a ist log. $1 = 0$, weil $a^0 = 1$; und der Logarithmen von der Grundzahl selbst ist immer $= 1$, weil $a^1 = a$.

4) Wird die Grundzahl größer als Eins, wie im gemeinen Logarithmen-Systeme, angenommen, so ist der Logarithmen jeder ganzen Zahl positiv, und der Logarithmen jedes ordentlichen Bruchs negativ.

$$10^3 = 1000; \quad +3 = \log. 1000;$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000}; \quad -3 = \log. \frac{1}{1000}.$$

5) Man erhält den Logarithmen des Produkts, wenn man die Logarithmen der Faktoren addirt.

$$a^m = B; \text{ und } a^n = C; \text{ folglich}$$

$$a^m . a^n = a^{m+n} = BC; \; m+n = \log. AB.$$

6) Der Logarithmen eines Quotienten wird gefunden, wenn man von dem Logarithmen der zu dividirenden Zahl subtrahirt den Logarithmeu des Theilers.

$$a^m = B \text{ und } a^n = C;$$

$$\frac{B}{C} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \text{ und}$$

$$m - n = \log. \frac{B}{C}.$$

7) Man findet den Logarithmen der Potenz, wenn man den Logarithmen der Wurzel multiplicirt mit dem Exponenten der Potenz.

$$\log. B^2 = \log. B + \log. B = 2 . \log. B;$$

$$\log. B^3 = \log. B + \log. B + \log. B = 3 . \log. B;$$

$$\log. B^n = n . \log. B.$$

8) Der Logarithmen der Wurzel wird erhalten, indem man den Logarithmen der Potenz dividirt mit dem Exponenten der Potenz.

$$2 \cdot \log. B = \log. B^2; \text{ alſo } \log. B = \frac{\log. B^2}{2};$$

$$\log. \sqrt[3]{25} = \frac{\log. 25}{3}; \ \log. \sqrt[n]{104} = \frac{\log. 104}{n}.$$

9) Mit Hülfe der Logarithmen wird das Rechnen sehr erleichtert, indem die Multiplikation und Diviſion der Zahlen in die Addition und Subtraktion ihrer Logarithmen verwandelt wird, und eben ſo das Potenziren und Depotenziren der Zahlen in Multiplikation und Diviſion ihrer Logarithmen.

## §. 35.

### Von den gemeinen logarithmiſchen Tafeln.

1) In den gemeinen logarithmiſchen Tafeln iſt immer 10 als Grundzahl angenommen, und daraus ergeben ſich die Logarithmen als ganze Zahlen für die Potenzen von 10

$10^1 = 10$; alſo $\log. 10 = 1$;
$10^2 = 100$; ″ $\log. 100 = 2$;
$10^3 = 1000$; ″ $\log. 1000 = 3$;
$10^4 = 10000$; ″ $\log. 10000 = 4$ u. ſ. f.

Die natürlichen Zahlen aber, die zwiſchen dieſe Potenzen der 10 fallen, haben Logarithmen, die nach §. 34. 2. berechnet werden können, und die zwiſchen 1 und 10 blos Brüche, ferner zwiſchen 10 und 100 ähnliche Brüche mit der Einheit, dann zwiſchen 100 und 1000 ähnliche Brüche mit zwei Einheiten u. ſ. f. erhalten müſſen.

Dieſe Logarithmen werden nun in ganzen Zahlen und zehntheiligen Brüchen ausgedrückt, und man nennt je eine ſolche ganze Zahl die Kennziffer, und den dabei befindlichen zehntheiligen Bruch die Mantiſſe.

Die Kennziffer zeigt daher an, zwischen welche Potenz der 10 die Zahl gehört, die dem Logarithmen entspricht, und sie ist immer Eins weniger, als die natürliche Zahl Ziffern hat.

2) Die Einrichtung und der Gebrauch einer jeden gemeinen logarithmischen Tafel, wie es deren jetzt mehrere giebt, müßte aus jeder solchen Tafel selbst erlernt werden. Zu forstlichen Zwecken sind vollkommen ausreichend folgende Tafeln:

G. Vega's Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Neue Auflage. Leipzig, in der Weidmannischen Buchhandlung.

3) Wer Aufgaben mit Hülfe der Logarithmen sicher und schnell lösen will, der muß sich fleißig geübt haben im Aufsuchen:

a) des Logarithmen für eine gegebene Zahl; z. B.

$$\log. 3047 = 3{,}4838725; \text{ oder}$$
$$\log. 1739845 = 6{,}2405105;$$
$$\log. 183{,}56 = 2{,}2637780;$$
$$\log. 0{,}47396 = 0{,}6754717 - 1;$$
$$\log. \frac{3854}{88736} = 3{,}5859117 - 4{,}9480998 =$$
$$= 0{,}6378119 - 2;$$

und

b) der natürlichen Zahl für einen gegebenen Logarithmen; z. B. der Logarithmen

| | | |
|---|---|---|
| 3,0478198 | hat zur natürlichen Zahl | 1116,4; |
| 6,3062872 | = = = = | 2024357; |
| 0,7398684—1 | = = = = | 0,5493743. |

**Aufgabe I.** Wenn man $\frac{104,39 \cdot 8704}{1936,82}$ mit Logarithmen ausführt?

$$
\begin{array}{rl}
\log.\ 104,39 & = 2,0186589 \\
\log.\ 8704 & = 3,9397189 \\
\hline
 & \phantom{=}\ 5,9583778 \\
-\ \log.\ 1936,82 & = 3,2870893 \\
\hline
 & \phantom{=}\ 2,6712885
\end{array}
$$

und dazu die natürliche Zahl $= 469,1241$.

**Aufgabe II.** Wie viel ist $10,046^{1,05}$ mal $1,03^{12}$?

$$
\begin{array}{rl}
\log.10,046 = 1,0019932 & (\cdot 1,05; \\
\hline
50099660 & \\
10019932 & \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log.1,03 = 0,0128372 & (\cdot 12 \\
\hline
256744 & \\
128372 & \\
\hline
0,1540464 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
1,05 \cdot \mathrm{l}.\ 10,046 & = 1,0520928\not{6}\not{0} \\
12 \cdot \log.1,03 & = 0,1540464 \\
\hline
 & \phantom{=}\ 1,2061392
\end{array}
$$

und die natürliche Zahl dazu $=$
$= 16,07456 \ldots$

**Aufgabe III.** Wie viel beträgt $\sqrt[5]{35107}$ und $\sqrt[20]{\frac{12}{7}}$?
Antwort: $8,111 \ldots$; und $1,03143 \ldots$

**Aufgabe IV.** In welche Potenz muß man 512 erheben, daß 33554432 herauskommt?

Hier ist $x \cdot \log.\ 512 = \log.\ 33554432$;
also der Exponent $x = \frac{\log.\ 33554432}{\log.\ 512} = \frac{7,5257499}{2,7092700} =$
$= 2,77 \ldots = 2\tfrac{7}{9}$.

# Dritter Abschnitt.

## Das Rechnen in Absicht auf Gleichheit.

### §. 36.

### Von deu Gleichungen und deren Auflösung im Allgemeinen.

1) Eine Gleichung ist eine Verknüpfung zweier Zahlformen von einer und derselben Größe. Die eine Form dieser Größe macht die eine Seite, und die andere Form die zweite Seite der Gleichung aus, und beide Seiten sind immer durch das Zeichen = verbunden.

$3 \cdot 4 = 12$; 18 Zoll = $1\frac{1}{2}$ Fuß; $a - b = c$.

2) Der Zweck bei den Rechnungen mit Hülfe der Gleichungen ist, aus den gegebenen Umständen einer Aufgabe, sowohl mit bekannten als unbekannten Größen, Gleichungen zu bilden, und dann aus diesen Gleichungen das Unbekannte aus dem Bekannten zu entwickeln.

3) Die unbekannten Zahlen werden hier ebenfalls mit den letzten Staben des Alphabets ausgedrückt, und eine Gleichung heißt aufgelöset, wenn die unbekannte Größe die eine Seite der Gleichung ausmacht, und die andere Seite durch bekannte Zahlen ausgedrückt ist.

$x = a - b$; $x = 20 + 4$.

4) Um den Werth der unbekannten Größe aus einer Gleichung zu entwickeln, dazu müssen oft viele Veränderungen mit den Gliedern der Gleichung vorgenommen

werden, welche Veränderungen sich alle darauf gründen müssen: daß gleiche Größen gleich bleiben, wenn man

a) zu beiden einerlei Größen addirt, oder davon subtrahirt;

b) beide durch einerlei Größe multiplicirt, oder dividirt;

c) beide zu einerlei Potenz erhebt, oder einerlei Wurzel aus ihnen auszieht; und

d) von beiden die Logarithmen nimmt.

5) Kommt in einer Gleichung die unbekannte Größe blos in der ersten Potenz vor, so heißt die Gleichung eine vom ersten Grade, oder eine einfache; ist aber die unbekannte Größe auch in der zweiten Potenz vorhanden, so heißt diese Gleichung eine vom zweiten Grade (oder eine quadratische); eben so eine vom dritten Grade (oder kubische), wenn die unbekannte Größe auch in der dritten Potenz vorkommt; ferner eine vom vierten, fünften u. s. w. Grade, wenn sie die unbekannte Größe auch in der vierten, fünften u. s. w. enthält.

6) Wenn eine Aufgabe nur einen einzigen Werth für die unbekannte Größe zuläßt, so heißt sie eine bestimmte, hingegen eine unbestimmte, wenn eine willkührliche Menge von Werthen für die unbekannte Größe gefunden werden kann.

## §. 37.

### Von der Auflösung einfacher Gleichungen.

1) Um die unbekannte Größe auf eine Seite allein zu bekommen, wird jede bei ihr stehende Größe weggeschafft durch ihr Entgegengesetztes, d. h. addirte Größen durch Subtraktion, subtrahirte durch Addition; multipli-

cirte Größen durch Division, und dividirte durch Multiplikation; endlich werden Potenzen durch Depotenziren, und Wurzelzeichen durch Potenziren beseitigt, z. B.

$$x + 4 = 12; \quad -4 - 4 \quad x = 8.$$

$$x + b - c = 3b; \quad -b + c \quad -b + c \quad x = 2b + c.$$

$$\frac{3x - 6}{5} = 9; \quad 3x - 6 = 45 \quad +6 + 6 \quad 3x = 51 \quad x = 17.$$

$$q = \frac{g \cdot x}{2} \quad 2q = g \cdot x \quad \frac{2q}{g} = x.$$

$$x^2 - 5 = 20; \quad +5 + 5 \quad x^2 = 25 \quad x = \sqrt{25} = 5.$$

$$ax^n = b; \quad x^n = \frac{b}{a} \quad x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

$$3 \cdot \sqrt[4]{x} = 18; \quad \sqrt[4]{x} = 6 \quad x = 6^4 = 1296.$$

$$\sqrt[n]{bx} = a; \quad bx = a^n \quad x = \frac{a^n}{b}.$$

2) Wenn die unbekannte Größe in mehreren Gliedern einer Gleichung vorkommt, so müssen diese Glieder so in ein Glied verwandelt werden, daß die unbekannte Größe nur einmal vorkommt. Wäre dabei die unbekannte Größe, deren Werth eben gesucht wird, auf beiden Seiten der Gleichung, so werden nach und nach die Glieder, welche jene unbekannte Größe enthalten, auf die Seite gebracht, auf welcher die unbekannte Größe den größten Werth hat.

Eine gesuchte negative unbekannte Größe wird ebenfalls auf die entgegengesetzte Seite gebracht. Z. B.

$$\begin{array}{rcl} 4x + 6 &=& x + 21; \\ -x && -x \\ \hline 3x + 6 &=& 21 \\ -6 && -6 \\ \hline 3x &=& 15 \\ x &=& 5. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} ax - bx &=& c \\ (a-b).x &=& c \\ x &=& \frac{c}{a-b}. \end{array}$$

3) Ist die unbekannte Größe als Nenner eines Bruchs aufgeführt, so muß die ganze Gleichung mit diesem Nenner multiplicirt werden. Z. B.

$$\begin{array}{rcl} \frac{36}{x} - 2 &=& 7; \\ 36 - 2x &=& 7x \\ +2x && +2x \\ \hline 36 &=& 9x \\ 4 &=& x. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{b}{x} - a &=& c \\ +a && +a \\ \hline \frac{b}{x} &=& a + c \\ b &=& (a+c)x \\ \frac{b}{a+c} &=& x. \end{array}$$

4) Steht das Wurzelzeichen auf einer Seite der Gleichung, so wird es weggelassen, und die andere Seite wird in dieselbe Potenz erhoben. Z. B.

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{(81 - x)} &=& 4; \\ 81 - x &=& 16 \\ +x && +x \\ \hline 81 &=& 16 + x \\ -16 && -16 \\ \hline 65 &=& x. \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt[3]{(ax - b)} &=& c \\ ax - b &=& c^3 \\ ax &=& c^3 + b \\ x &=& \frac{c^3 + b}{a} \end{array}$$

2) Ist die unbekannte Größe ein Exponent, so kann die Gleichung nur mit Hülfe der Logarithmen bequem aufgelöset werden. Z. B.

$$2^x = 783964$$

$$x \cdot \log. 2 = \log. 783964$$

$$x = \frac{\log. 783964}{\log. 2} = \frac{5{,}8942961}{0{,}30103} = 19{,}58\ldots$$

## §. 38.

### Von der Bildung einer Gleichung aus einer Aufgabe.

Eine Aufgabe giebt die Umstände an, unter welchen eine Zahl, gewöhnlich die unbekannte, einen gewissen Werth erhalten soll. Wenn nun die Aufgabe eine Rechnung durch Gleichung zuläßt, und man will die in ihr begründete erste Gleichung darstellen, so sucht man alles das in Zahlen, Buchstaben und mathematischen Zeichen auszudrücken, was die Aufgabe in Worten ausspricht. Dabei sieht man zuerst auf die unbekannte Größe und benennt solche; dann schreibt man alles in der Aufgabe Enthaltene in Zahlen und Zahlzeichen, nebst den Zeichen der Rechnungarten und dem Gleichheitzeichen dazu, und vergleicht endlich die so gebildete Gleichung nochmals mit der Aufgabe, um einen vielleicht eingeschlichenen Fehler zu berichtigen. Die auf diese Weise richtig befundene Gleichung löset man nun nach den vorigen §§. auf.

Die folgenden, beispielweise hier aufgeführten, Aufgaben mit ihren Auflösungen geben einfache Gleichungen vom ersten Grade, d. h. es kommt jedesmal die unbekannte Größe nur in der ersten Potenz vor. Das Wichtige, mit Gleichungen zu rechnen, muß man nicht im wirklichen Leben, sondern in der Mathematik selbst suchen, und dann wird man bald finden, wie vortheilhaft diese Kunst ist.

Aufgabe I. In einem Bestande waren die Eichen 46, die Fichten 11, und die Buchen 9 Jahre alt; wann werden die letzten zusammengenommen so alt seyn wie die Eichen?

Offenbar wird dieses in einer Anzahl Jahren der Fall seyn, die x genannt werden mag, und dann sind alt:

a) die Eichen $= 46 + x$
b) die Fichten $= 11 + x$
c) die Buchen $= 9 + x$, folglich:

$$46 + x = (11 + x) + (9 + x); \text{ oder}$$
$$46 + x = 20 + 2x$$
$$\underline{\phantom{46}-x \qquad -x}$$
$$46 = 20 + x$$
$$\underline{-20 \qquad -20}$$
$$26 = x \text{ Jahre.}$$

Aufgabe II. In einem Bestande waren die Fichten 50, die Kiefern 26 Jahre alt; wann werden jene Kiefern halb so alt als die Fichten seyn?

Geschieht dieses wieder in x Jahren, so sind dann alt:

a) die Fichten $= 50 + x$
b) die Kiefern $= 26 + x$, folglich:

$$\frac{50 + x}{2} = 26 + x; \text{ oder}$$
$$50 + x = 52 + 2x$$
$$\underline{\phantom{50}-x \qquad -x}$$
$$50 = 52 + x$$
$$\underline{-52 \qquad -52}$$
$$-2 = x.$$

Also waren die Kiefern vor zwei Jahren schon halb so alt.

Aufgabe III. Die Hälfte und $\frac{3}{8}$ der Stämme waren geschlagen, und es standen auf dem Schlage noch 15 Stück; wie viel waren es anfänglich Stämme?

Hier ist die Anzahl der Stämme x, und also nach der Aufgabe:

$$x - \frac{x}{2} - \frac{3x}{8} = 15; \text{ oder: } \frac{8x}{8} - \frac{7x}{8} = 15$$

$$\frac{x}{8} = 15$$

$$x = 120.$$

Aufgabe IV. Auf einem Schlage standen 4mal so viel Eichen als Buchen, und nachdem 4 Eichen und 4 Buchen verkauft waren, blieben noch 6mal so viel Eichen als Buchen stehen; wie viel waren es deren anfangs?

Waren es x Buchen, so waren es 4x Eichen; nach dem Verkaufe waren es noch 4x — 4 Eichen und x — 4 Buchen; also ist $\frac{4x - 4}{6} = x - 4$

$$4x - 4 = 6x - 24$$

$$-4x + 24 = -4x + 24$$

$$20 = 2x; \text{ und } 10 = x.$$

## §. 39.

### Von der Auflösung einfacher Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

1) Wenn eine Aufgabe zwei unbekannte Größen in sich enthält, so wird jede unbekannte Größe mit einem bestimmten Buchstaben bezeichnet, und aus der Aufgabe werden nach den vorigen §§. zwei Gleichungen gebildet. Aus diesen zwei Gleichungen sucht man nun eine einzige Gleichung so zu entwickeln, daß eine der beiden unbekannten Größen allein in ihr vorkommt, welche Gleichung hierauf nach §. 37. und 38. aufgelöset wird. Diesen dadurch gefundenen Werth der einen unbekannten Größe setzt man

endlich in eine der ersten Gleichungen, und entwickelt daraus auch den Werth der anderen unbekannten Größe.

2) Um aber aus den zwei ersten, oder Grundgleichungen, eine neue Gleichung zu entwickeln, die von beiden unbekannten Größen nur eine unbekannte Größe in sich enthält, dazu wendet man eine der folgenden drei Hauptmethoden an.

A. Aus jeder der beiden Grundgleichungen entwickelt man den Werth einer und derselben unbekannten Größe, z. B. von x, und setzt dann diese beiden Werthe in eine neue (abgeleitete) Gleichung, und entwickelt daraus auch den Werth der anderen unbekannten Größe. Mit diesem dadurch erhaltenen Werthe läßt sich dann aus einer der gehabten Gleichungen leicht auch der Werth der anderen Größe bestimmen. Z. B.

I. $x + y = 15$; giebt $x = 15 - y$

II. $x - y = 7$; und $x = 7 + y$; folglich

III. $15 - y = 7 + y$

$$15 = 7 + 2y$$

$$\frac{8}{2} = y = 4; \text{ und } x = 11.$$

Oder:

I. $a + x = by$; giebt $x = by - a$;

II. $x + y = c$; und $x = c - y$; folglich

III. $by - a = c - y$

$$+y + a \quad +a + y$$

$$by + y = a + c$$

$$(b+1)y = a + c$$

$$y = \frac{a + c}{b + 1}; \text{ und}$$

$$x = c - \frac{a + c}{b + 1}; \text{ oder}$$

$$x = \frac{bc - a}{b + 1}.$$

B. Man ändert beide Grundgleichungen so lange, wenn es nöthig ist, bis man sieht, daß eine der unbekannten Größen gleich Null wird, wenn man beide Gleichungen zusammen addirt, oder von einander subtrahirt. Dann sucht man den Werth der gebliebenen Größe aus der erhaltenen Gleichung, und bestimmt dann hieraus und aus einer der Grundgleichungen auch den Werth der anderen unbekannten Größe.

Es sey wieder:

I. $x + y = 15$; und

II. $x - y = 7$; beide hier schon ohne Aenderung addirt, giebt:

III. $2x = 22$; also

$x = 11$; und diesen Werth für x in die erste Grundgleichung gesetzt, giebt:

$$11 + y = 15$$

$$y = 15 - 11 = 4.$$

Ferner:

I. $ax - by = c$;

II. $x + y = a$; diese zweite Gleichung mit b multiplicirt und dann zur ersten addirt, nämlich

$bx + by = ab$; giebt

III. $ax + bx = ab + c$; oder

$(a+b)x = ab + c$; und

$$x = \frac{ab + c}{a + b}.$$

Diesen Werth für x in die Gleichung II. gesetzt, giebt:

$\frac{ab+c}{a+b} + y = a$; oder

$$y = a - \frac{ab + c}{a + b} = \frac{a^2 - c}{a + b}.$$

C. Aus einer der Grundgleichungen entwickelt man den Werth der einen unbekannten Größe, und substituirt diesen gefundenen Werth für die eine unbekannte Größe in die andere Grundgleichung. Dadurch erhält man eine neue Gleichung mit einer einzigen unbekannten Größe, die dann wie gewöhnlich aufgelöset wird, und woraus sich dann auch die andere Größe wie vorhin bestimmen läßt. Z. B.

I. $x + y = 15$;

II. $x + 3y = 31$; hier ist aus der ersten Gleichung $x = 15 - y$; und diesen Werth in Gleichung II. substituirt, giebt:

$$15 - y + 3y = 31; \text{ oder}$$
$$15 + 2y = 31$$
$$y = \frac{31 - 15}{2} = 8$$
$$x = 15 - 8 = 7.$$

Ferner:

I. $ax = by$;

II. $x + y = c$. Aus Gleichung I. ist $x = \frac{by}{a}$;

also III. $\frac{by}{a} + y = c$; oder $by + ay = ac$;

$$(b + a)y = ac; \text{ oder}$$
$$y = \frac{ac}{a + b}; \text{ und}$$
$$x = \frac{bc}{a + b}.$$

**Aufgabe I.** Ein Jäger hatte in einem Tage zwanzigmal geschossen, und weil er für jeden Treffer 8 gl. bekam, hingegen für jeden Fehlschuß 12 gl. bezahlen mußte, so bekam er noch 20 gl. heraus. Wie vielmal hatte er also getroffen?

Hat der Jäger xmal getroffen und ymal gefehlt, so ist:

I. $8x - 12y = 20$

II. $x + y = 20$; diese Gleichung II. mit 12 multiplicirt und zu Gleichung I. addirt, nämlich $12x + 12y = 240$, giebt

III. $20x = 260$

$x = 13$, und

$y = 7$.

Aufgabe II. Bei einem Holzverkaufe wurden 2 Buchen und 8 Eichen für 64 Thlr. und 3 Buchen und 6 Eichen nach demselben Preise für 54 Thlr. verkauft. Wie viel kostete ein Stamm von jeder Art?

Kostete der Stamm von Buchen x Thlr. und der von Eichen y Thlr., so ist:

I. $2x + 8y = 64$; ferner

II. $3x + 6y = 54$; wird nun die erste Gleichung mit 2, und die andere mit 3 dividirt, und dann die letzte abgezogen von der vorhergehenden, so erhält man

III. $2y = 14$

$y = 7$; und

$x = 4$.

Aufgabe III. Es soll ein Bruch gefunden werden, der, wenn man Eins vom Zähler nimmt, $\frac{1}{4}$ giebt, und der, Eins vom Nenner genommen, $\frac{1}{3}$ übrig läßt; welches ist dieser Bruch?

Nennt man den Zähler x und den Nenner y, so ist:

I. $\frac{x-1}{y} = \frac{1}{4}$; $x - 1 = \frac{y}{4}$; $x = \frac{y+4}{4}$;

II. $\frac{x}{y-1} = \frac{1}{3}$; $x = \frac{y-1}{3}$; folglich

III. $\frac{y+4}{4} = \frac{y-1}{3}$; oder

$$\begin{array}{r} 3y + 12 = 4y - 4; \\ -3y + 4 - 3y + 4 \\ \hline 16 = y \text{ und} \\ 5 = x \end{array} \Big\} \text{der Bruch } \frac{5}{16}.$$

Aufgabe IV. Wann die Summe zweier Zahlen 96, und die eine um 16 größer als die andere seyn soll; welche Zahlen sind es?

Nennt man die größere Zahl x und die kleinere y, so ist:

$$\begin{array}{lr} \text{I.} & x + y = 96; \\ \text{II.} & x = y + 16; \\ \hline \text{III.} & y + 16 + y = 96 \\ & -16 \quad\quad -16 \\ \hline & 2y = 80 \\ & y = 40 \\ & \text{und } x = 56. \end{array}$$

Anmerk. Bei einiger Uebung in der Auflösung solcher Aufgaben lernt man bald beurtheilen, welche Methode der Auflösung in einem gegebenen Falle am vortheilhaftesten anzuwenden sey, so wie sich auch bei der Uebung viele Vortheile ergeben, die nicht gelehrt zu werden bedürfen.

## §. 40.

### Von einfachen Gleichungen mit 3 und mehr unbekannten Größen.

Bei der Auflösung einer Aufgabe mit drei und mehr unbekannten Größen muß man eben so viele Gleichungen bilden, als unbekannte Größen in ihr vorkommen. Mit diesen Gleichungen werden dann solche Veränderungen und Verbindungen, wie im vorigen §., vorgenommen, damit man zuletzt eine Gleichung erhält, in der sich nur eine ein-

zige unbekannte Größe befindet, und woraus diese unbekannte Größe bestimmt wird.

Endlich wird, durch Substitution in die vorigen Gleichungen, eine unbekannte Größe nach der andern entwikkelt. Z. B.

I. $2\frac{1}{2}x + 2y + z = 52\frac{1}{2}$;

II. $2x = y$; oder $4x = 2y$;
III. $2y = z$; oder $4x = z$; } Diese Werthe für 2y und z in Gleichung I. gesetzt, giebt:

IV. $2\frac{1}{2}x + 4x + 4x = 52\frac{1}{2}$; oder

$10\frac{1}{2}x = 52\frac{1}{2}$; giebt

$x = 5$;

$y = 10$;

und $z = 20$.

Ferner:

I. $x + by = z$;

II. $x - y = a$: oder $x = a + y$;

III. $2y = z$;

IV. $a + y + by = 2y$;

$- y - by; - y - by$

$a = y - by$;

$a = (1-b)y$; folglich

$$\frac{a}{1-b} = y;$$

$$\frac{2a}{1-b} = z; \text{ und}$$

$$\frac{2a-ab}{1-b} = x.$$

Wäre $a = 4$ und $b = \frac{1}{2}$; so müßte seyn $y = 8$, $z = 16$, und $x = 12$.

Aufgabe I. Drei Arbeiter, von denen der erste täglich 8, der zweite 7 und der dritte 6 gl. Lohn erhält, haben zusammen 146 Tage gearbeitet, und je-

der bekommt gleich viel an Gelde. Wie viel Tage hat jeder gearbeitet?

Antwort: 42, 48 und 56 Tage.

Aufgabe II. Eine Quantität Holz wurde von einem Händler mit Verlust für 224 Thlr. verkauft; hätte er sie aber für 260 Thlr. verkaufen können, so wäre der Gewinn dreimal so groß gewesen, als jetzt der Verlust ist. Wie groß war der Einkaufpreis?

Antwort: 233 Thlr.

## §. 41.

### Von den reinen quadratischen Gleichungen, und deren Auflösung.

Eine reine quadratische Gleichung ist eine solche, in welcher die unbekannte Größe blos in der zweiten Potenz, und nicht auch in der ersten Potenz, vorkommt.

Ihre Auflösung geschieht dadurch, daß man $x^2$ auf eine Seite allein bringt, und dann beiderseits die Quadratwurzel auszieht. Denn wäre

$$ax^2 - c = b; \text{ so würde seyn}$$

$$x^2 = \frac{b+c}{a}; \text{ und}$$

$$x = \sqrt{\frac{b+c}{a}}.$$

Oder: $3x^2 - 12 = 15540$; giebt

$$x^2 = \frac{15540+12}{3} = 5184; \text{ und}$$

$$x = \sqrt{5184} = 72.$$

Aus den Aufgaben, auch mit zwei und mehr unbekannten Größen, werden diese reinen quadratischen Gleichungen eben so, wie in den vorhergehenden §§. bei einfachen Gleichungen, abgeleitet; auch wird auf gleiche Weise

die unbekannte Größe in der 2ten Potenz entwickelt und auf eine Seite allein gebracht, und nur zuletzt beiderseits die Quadratwurzel ausgezogen. Dabei muß man sich nur erinnern, daß, wenn $x^2 = a$ war (nach §. 33. 5 und 8.), seyn kann $x = \pm\sqrt{a}$, und daß in je einem Falle $y = \sqrt{-b}$ eine unmögliche Zahl ist.

Aufgabe I. Welche Zahl ist es, deren siebenter und achter Theil mit einander multiplicirt, und das Produkt durch 3 dividirt zum Quotienten $298\frac{2}{3}$ giebt?

$$\left(\frac{x}{7} \cdot \frac{x}{8}\right) : 3 = 298\tfrac{2}{3};$$

$$\frac{x^2}{56} = 896;$$

$$x = \sqrt{(896 \cdot 56)} = 224.$$

Aufgabe II. Was für zwei Zahlen sind es, welche mit einander multiplicirt zum Produkte 750, durch einander dividirt zum Quotienten $3\frac{1}{3}$ geben?

Nennt man die größere gesuchte Zahl x, und die kleinere y, so ist nach der Aufgabe:

$$\text{I.} \quad x \cdot y = 750;$$

$$\text{II.} \quad \frac{x}{y} = 3\tfrac{1}{3}; \quad x = 3\tfrac{1}{3}y;$$

$$\text{III.} \quad 3\tfrac{1}{3}y \cdot y = 750;$$

$$\frac{10y^2}{3} = 750;$$

$$y^2 = \frac{750 \cdot 3}{10} = 225;$$

$$y = \sqrt{225} = 15 \text{ und}$$

$$x = 50.$$

Aufgabe III. Zwei Zahlen haben zur Summe 41, und zur Summe ihrer Quadrate 1301; welche Zahlen sind es?

Antwort: 25 und 26.

Aufgabe IV. Von zwei Zahlen ist die eine um 5 größer als die andere, und die Summe der Quadratzahlen beider ist 73; welche Zahlen sind es?

Antwort: 3 und 8.

## §. 42.

## Von unreinen (oder gemischten) quadratischen Gleichungen.

1) Gleichungen heißen unreine oder gemischte quadratische, wenn die unbekannte Größe nicht nur im Quadrate, sondern auch in der ersten Potenz vorkommt; z. B. $x^2 = x + 30$.

In einer solchen Gleichung können aber nur dreierlei Glieder vorkommen, nämlich:

a) solche, welche das Quadrat der unbekannten Größe enthalten;

b) solche, in welchen die unbekannte Größe selbst in der ersten Potenz steht; und

c) solche, welche aus lauter bekannten Zahlen bestehen.

Da nun zwei und mehrere Größen in ein einziges Glied verwandelt, und alle Glieder auf eine Seite gebracht werden können, so ist die allgemeine Form dieser Gleichungen folgende:

$$ax^2 \pm bx \pm c = 0.$$

2) Wie nun der Werth von x aus der letzten Gleichung zu finden sey, darüber muß man Folgendes bemerken.

a) Durch Division läßt jede Gleichung sich so einrichten, daß das erste Glied blos das Quadrat der unbekannten Größe enthält; nämlich obige allgemeine Form giebt dann:

$$x^2 \pm \frac{bx}{a} \pm \frac{c}{a} = 0.$$

Setzt man $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, so wird daraus

$$x^2 \pm px \pm q = 0;\ \text{oder}$$

$$x^2 \pm px = \pm q.$$

b) Der Ausdruck $x^2 \pm px$ ist aber nicht wirklich eine zweite Potenz, sonst dürfte man nur beiderseits die Quadratwurzel ausziehen; er wird es aber, wenn man $\frac{1}{4}p^2$ dazu addirt. Denn

$$(x + \tfrac{1}{2}p) \cdot (x + \tfrac{1}{2}p) = x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2.$$

Addirt man daher dieses $\frac{1}{4}p^2$ beiderseits in obiger allgemeinen Gleichung, so erhält man

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = q + \tfrac{1}{4}p^2,$$

welche Gleichung auf der einen Seite das Quadrat von $(x + \frac{1}{2}p)$ und auf der anderen blos bekannte Zahlen enthält.

c) Zieht man nun wirklich beiderseits die Quadratwurzel aus, so erhält man:

$$x + \tfrac{1}{2}p = \sqrt{(q + \tfrac{1}{4}p^2)}.$$

Schafft man endlich $\frac{1}{2}p$ auf die andere Seite, und erinnert man sich, daß jede Quadratwurzel + oder — seyn kann; so erhält man folgendes allgemeine Schema zur Auflösung unreiner quadratischer Gleichungen: $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{(q + \frac{1}{4}p^2)}$.

d) Zu Worten ausgedrückt sagt diese allgemeine Formel: „Wann die unreine quadratische Gleichung auf jene „allgemeine Form, $x^2 \pm px \pm q = 0$, gebracht ist, „so erhält man den Werth von x, wenn man die „Hälfte der Zahl, womit x multiplicirt, mit entge„gengesetztem Zeichen nimmt, und dazu (+ oder —) „addirt eine Quadratwurzel aus dem Quadrate die„ser halben Zahl und der blosen Zahl des dritten „Gliedes der Gleichung.“ Z. B.

$$x^2 - 6x - 7 = 0;$$ oder
$$x^2 = 6x + 7;$$ giebt
$$x = 3 \pm \sqrt{(7+9)} = 3 \pm 4;$$

und die Umstände einer Aufgabe müssen entscheiden, ob hier $x = 7$ oder $x = -1$ seyn kann.

3) Jede unreine quadratische Gleichung läßt sich als ein Produkt aus zwei Faktoren darstellen, und ihr Werth muß dann gleich Null seyn, wann nur ein Faktor $= 0$ war. Dabei können folgende Fälle stattfinden:

a) Wären beide Werthe für die Faktoren positiv, nämlich $x = a$ und $x = b$, mithin $x - a = 0$, und $x - b = 0$; so hat die Gleichung folgende durch $(x - a) . (x - b)$ erhaltene Gestalt:

$$x^2 - (a + b)\, x + ab = 0;$$

d. h. das zweite Glied ist negativ.

b) Wird einer der beiden Werthe negativ gesetzt, nämlich $x - a = o$, und $x + b = 0$, so wird aus $(x - a) . (x + b)$ die allgemeine Form folgende seyn:

$$x^2 + (b - a)\, x - ab = 0;$$

d. h. das zweite Glied ist $+$, wenn $b > a$, hingegen $-$, wenn $a > b$, und das dritte Glied ist negativ.

c) Sind beide Werthe negativ gewesen, also $x + a = 0$, und $x + b = 0$, so ist daraus die Gleichung folgende:

$$x^2 + (a + b)\, x + ab = 0;$$

d. h. alle Glieder sind positiv geworden.

Aus diesen Aufstellungen sieht man wenigstens, warum die allgemeine Form dieser Gleichungen

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

immer zwei Werthe für x zuläßt, indem in dieser sachlichen Beziehung eigentlich die Antwort auf die Frage nach zwei Größen gegeben wird.

4) Waren beide Werthe für die Faktoren in einer solchen Gleichung unmögliche oder eingebildete Größen, so muß zuletzt die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl erscheinen. Z. B.

$$x - 10x + 30 = 0 \text{ giebt}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{(25 - 30)} = 5 \pm \sqrt{-5};$$

oder wäre allgemein

$$x^2 - px + q = 0; \text{ also}$$

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)},$$

wobei die beiden Werthe eingebildete Größen seyn müssen, wenn $q > \frac{1}{4}p^2$, oder $4q > pp$.

5) Es lassen sich (nach 3.) sehr leicht unreine quadratische Gleichungen (und mithin auch Aufgaben für solche) dadurch bilden, daß man je zwei Werthe für die unbekannte Größe annimmt, diese auf Null bringt, und dann diese Faktoren mit einander multiplicirt.

Z. B. $x = 7$ und $x = 10$; also $x - 7 = 0$ und $x - 10 = 0$; also giebt $(x - 7) \cdot (x - 10)$ folgende Gleichung:

$$x^2 - 17x + 70 = 0;$$

und daraus ist ebenfalls wieder

$$x = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{289}{4} - 70\right)}; \text{ und}$$

$$x = \frac{17}{2} \pm \frac{3}{2} = 10 \text{ oder } 7.$$

6) Ist eine unreine quadratische Gleichung aufgelöset, so läßt sich die Probe des richtigen Rechnens dadurch machen, daß man mit einem für x gefundenen Werthe, in Gleichung auf Null gebracht, in die gegebene Gleichung

dividirt, wodurch man zum Quotienten den anderen Werth für x erhalten muß, und wobei auch kein Rest bleiben darf.

Z. B. ist $x = 7$ der eine Werth in der vorigen Gleichung, also $x - 7 = 0$, so ist auch

$$\frac{x^2 - 17x + 70}{x - 7} = x - 10;$$

und also $x - 10 = 0$, oder $x = 10$ der andere Werth.

Aufgabe I. Wie groß muß eine Zahl seyn, daß, wenn man zu ihr 55 addirt und 45 von ihr subtrahirt, und dann die Summe mit dem Reste multiplicirt, 900000 herauskommt?

Nennt man die Zahl x, so ist

$$(x + 55) \cdot (x - 45) = 900000; \text{ oder}$$
$$x^2 + 10x - 2475 = 900000;$$
$$x^2 + 10x - 902475 = 0 \text{ und}$$
$$x = -5 \pm \sqrt{(25 + 902475)};$$
$$x = -5 \pm 950 = 945 \text{ oder } -955.$$

Aufgabe II. Eine Fläche von 60 Morgen, zu 120 □R., soll abgesteckt werden, und diese soll viermal so lang, und 20 Ruthen drüber, als breit seyn; wie groß ist die Länge und die Breite?

Antwort: 180° Länge und 40° Breite.

Aufgabe III. Welche zwei Zahlen sind es, deren Summe 35 ist, und deren Quadrate die Summe 625 geben?

Nennt man die eine Zahl x und die andere y, so ist nach der Aufgabe

$$\text{I.} \quad x + y = 35; \text{ giebt } y = 35 - x \text{ und}$$
$$y^2 = 1225 - 70x + x^2;$$
$$\text{II.} \quad x^2 + y^2 = 625; \text{ giebt } y^2 = 625 - x^2;$$
$$\text{III.} \quad 1225 - 70x + x^2 = 625 - x^2$$
$$-625 \qquad + x^2 - 625 + x^2$$
$$2x^2 - 70x + 600 = 0$$
$$x^2 - 35x + 300 = 0$$

$$x = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1225}{4} - 300\right)};$$

$$x = \frac{35}{2} \pm \frac{5}{2} = 20; \text{ und}$$

$$y = 15.$$

Aufgabe IV. Es kaufte jemand für 180 Thlr. etliche Stämme, und sagte nachher: Wären es drei Stämme mehr gewesen für dasselbe Geld, so würde mir das Stück 3 Thlr. wohlfeiler gekommen seyn. Wie viel waren es Stämme?

Antwort: 12.

Aufgabe V. Wie viel beträgt jene Höhe, fragte jemand, und erhielt zur Antwort: Addire zur wirklichen Höhe 1009 Fuße, oder subtrahire von ihr 106, so erhältst du Kubikzahlen, deren Wurzeln nur um 5 verschieden sind. Wie viel betrug demnach die Höhe?

Antwort: 322 Fuß.

## §. 43.

### Von reinen kubischen Gleichungen.

Eine Gleichung, welche die unbekannte Größe blos in der 3ten Potenz und nicht auch in der 2ten oder 1sten enthält, heißt eine reine kubische; und eine solche wird aufgelöset, indem man die unbekannte Größe auf eine Seite allein bringt und dann beiderseits die Kubikwurzel auszieht.

$$ax^3 = b;$$

$$x^3 = \frac{b}{a};$$

$$\text{und } x = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

$$x^2 \cdot \tfrac{1}{4}x = 432;$$

$$\frac{x^3}{4} = 432;$$

$$x^3 = 432 \cdot 4 = 1728;$$

$$x = \sqrt[3]{1728} = 12.$$

Aufgabe. Wenn man dieselbe Anzahl der auf einer Fläche übergehaltenen Samenbäume mit $\frac{2}{3}$, dann mit $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$ derselben multiplicirte, so würden es ihrer 54000 seyn; wie viel sind ihrer?

Antwort: 60.

## §. 44.

### Von unreinen (oder gemischten) kubischen Gleichungen.

1) Eine unreine (vollständige) kubische Gleichung enthält die unbekannte Größe nicht nur in der 3ten, sondern auch in der 2ten und 1sten Potenz.

2) Sieht man die unreine kubische Gleichung als ein Produkt aus drei Faktoren an, z. B.

$$(x - p) \cdot (x - q) \cdot (x - r) =$$
$$= x^3 - (p + q + r) x^2 + (pq + pr + qr) x - pqr;$$

so wird das Ganze gleich Null seyn,

1) entweder wenn $x - p = 0$, also $x = p$,

2) oder wenn $x - q = 0$, also $x = q$,

3) oder wenn $x - r = 0$, also $x = r$ war.

Wäre nun die allgemeine Form der unreinen kubischen Gleichungen folgende:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0;$$

so müßte nach jenen Faktoren seyn:

$$a = p + q + r;$$
$$b = pq + pr + qr; \text{ und}$$
$$c = pqr.$$

3) Daraus folgt, daß das letzte Glied der auf Null gebrachten unreinen kubischen Gleichung enthält das Produkt aus allen drei Wurzeln, und daß mithin der wahre Werth für x nur ein solcher seyn kann, der das letzte Glied der Gleichung ohne Rest dividirt.



Bayerische Staatsbibliothek München

4) Einen Faktor des letzten Gliedes also $= x$ gesetzt, dieses ebenfalls auf Null gebracht, und damit in die kubische Gleichung dividirt, giebt eine quadratische Gleichung zum Quotienten, wenn bei der Division kein Rest bleibt, und folglich der angenommene Werth für $x$ der wahre ist; außerdem muß man einen neuen Faktor gleich $x$ setzen und dieses Dividiren wiederholen. Aus dem Quotienten als einer quadratischen Gleichung lassen sich hernach die beiden anderen Werthe für $x$ finden. Z. B.

Es sey gegeben $x^3 - x - 6 = 0$; so hat 6 nur 1, oder 2, oder 3, oder 6 zu Faktoren; setzt man $x = 2$, so ist $x - 2 = 0$, und dividirt damit

$$x - 2) : x^3 - x - 6 \ddagger x^2 + 2x + 3;$$

$$\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 \\ \quad - \quad + \\ \hline \quad + 2x^2 - x - 6 \\ \quad + 2x^2 - 4x \\ \quad - \quad\quad + \\ \hline \quad\quad + 3x - 6 \\ \quad\quad + 3x - 6 \\ \quad\quad - \quad + \\ \hline \quad\quad\quad 0. \end{array}$$

Nimmt man nun den Quotienten als quadratische Gleichung, und löset diese auf: so ergiebt sich daraus für $x = 1 \pm \sqrt{-2}$, welches zwei Werthe gäbe, die eingebildete Größen sind; also ist wirklich nur $x = 2$.

5) Wenn Brüche in der Gleichung vorkommen, so verwandelt man die Gleichung selbst in eine andere dadurch, daß man $x$ gleich einem Bruche setzt, der $y$ zum Zähler und eine Zahl zum Nenner hat, die gleich dem Nenner in der Gleichung selbst, oder einer Wurzel aus

ihm ist; hierauf substituirt man alle Werthe in eine neue Gleichung, und löset dann diese auf. Z. B.

$$x^3 - 3x^2 + \frac{11x}{4} - \frac{3}{4} = 0;$$

setzt man hier $x = \frac{y}{2}$, so erhält man:

$$\frac{y^3}{8} - \frac{3y^2}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0,$$ multiplicirt mit 8 und dividirt mit $y - 3$, giebt:

$$
\begin{array}{rl}
y-3:) & y^3 - 6y^2 + 11y - 6 = 0 \quad (y^2 - 3y + 2 \\
& +y^3 - 3y^2 \\
& - \quad + \\
\hline
& -3y^2 + 11y - 6 \\
& -3y^2 + 9y \\
& + \quad - \\
\hline
& +2y - 6 \\
& +2y - 6 \\
& - \quad + \\
\hline
& 0.
\end{array}
$$

$y^2 - 3y + 2 = 0$; also

$$y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 2\right)}$$

$$y = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$y = 3$ oder $2$ oder $1$

und $x = \frac{3}{2}$ oder $1$ oder $\frac{1}{2}$.

6) Wenn ferner das erste Glied $x^3$ der geordneten Gleichung mit einer Zahl multiplicirt wäre, so dividirt man die ganze Gleichung mit dieser Zahl; und wenn dadurch Brüche entstehen, so verfährt man wieder wie vorhin. Z. B.

$$6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0; \text{ giebt}$$

$$x^3 - \frac{11x^2}{6} + x - \frac{1}{6} = 0;$$

aber setzt man $x = \frac{y}{6}$, so ist

$$\frac{y^3}{216} - \frac{11y^2}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0;$$

und diese mit 216 multiplicirt, kommt

$$y^3 - 11y^2 + 36y - 36 = 0;$$

Faktoren von 36 sind 1, 2, 3, 4, 6, 9 ꝛc.; also $x = 1$

oder $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$, und ohne Rest dividirt $y = 2$; nämlich der Faktor $y - 2 = 0$.

7) Aus dem allen ergiebt sich auch:

a) wenn alle Werthe für $x$ positive Zahlen sind, die Zeichen in der Gleichung + und — mit einander abwechseln; z. B.

$$x^3 - ax + bx - c = 0;\quad \text{und}$$

b) bei negativen Werthen sind alle Zeichen der Gleichung +; z. B.

$$x^3 + ax + bx + c = 0.$$

Aufgabe I. Aus dem Bestande A wurden 12 Klaftern mehr als aus B geschlagen, und nachdem man die Summe beider mit dem Produkte der Klafterzahl multiplicirt hatte, so kam die Zahl 14560 heraus; wie groß war die Klafterzahl aus B?

Antwort: 14.

Aufgabe II. Von einer Flüssigkeit wurden 4 Kannen abgezapft und dafür so viel Wasser hinzu gegossen; von der Mischung nahm man wieder 4 Kannen, und goß wieder so viel Wasser dazu, und das nämliche geschah zum dritten Male; nun fand sich, daß $2\frac{1}{2}$ Kanne mehr Wasser als jener Flüssigkeit im Gefäße war. Wie viel Kannen waren daher anfangs im Gefäße?

Antwort: 16.

## Vierter Abschnitt.

### Das Rechnen in Absicht auf Verhältniß.

### §. 45.

#### Erklärungen.

1) Haben zwei Größen etwas Gemeinsames, und es kommt ihnen dieses Gemeinsame in verschiedenem Maße zu: so sagt man, diese zwei Größen stehen im Verhältnisse.

2) Werden die Größen als in Zahlen gegeben gedacht: so muß es sich auch durch Rechnung ausdrücken lassen, um wie viel die eine Größe des Verhältnisses größer oder kleiner als die andere ist; und dieß geschieht entweder durch Addition und ihre Entgegensetzung die Subtraktion, oder durch Multiplikation und ihre Entgegensetzung die Division.

Die allgemeine Form ist daher:

a zu (a ± d), genannt arithmetisches, und

a zu ae, genannt geometrisches Verhältniß.

3) Der Unterschied der zwei Glieder im arithmetischen Verhältnisse heißt der Name des Verhältnisses.

Bei einem geometrischen Verhältnisse hingegen heißt der Quotient der beiden Glieder der Exponent des Verhältnisses.

4) Zwei gleiche Verhältnisse bilden eine Proportion, und dann heißt jede Größe in der Proportion ein Glied derselben.

Die allgemeine Form ist:

I. $a \div (a \pm d) = b \div (b \pm d)$, eine arithmetische Proportion; und

II. $a : ae = b : be$, eine geometrische Proportion.

5) In jeder Proportion werden das erste und letzte Glied zusammen äußere Glieder, und die beiden anderen Mittelglieder genannt. Sind diese Mittelglieder einander gleich, so heißt die Proportion selbst eine stetige.

$$3 \div 6 = 6 \div 9; \quad 2 : 4 = 4 : 8.$$

§. 46.

Von arithmetischen Proportionen.

1) In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder gleich der Summe der Mittelglieder.

Ist nämlich $a \div (a + d) = b \div (b + d)$, so ist auch $a + b + d = a + d + b$.

$$5 \div 9 = 7 \div 11; \quad 5 + 11 = 9 + 7 = 16.$$

2) Darauf ist die Aufgabe gegründet: zu drei Gliedern das vierte arithmetische Proportionalglied zu finden, oder auch zu zwei Gliedern das mittlere.

Wäre nämlich $x \div 4 = 10 \div 12$; so müßte auch $x + 12 = 10 + 4$, und $x = 2$ seyn.

Ferner $3 \div 7 = 18 \div x$; giebt $x + 3 = 25$, und $x = 22$.

Verhielte sich endlich:

$$4 \div x = x \div 12; \text{ so wäre}$$
$$2x = 12 + 4; \text{ oder}$$
$$x = \frac{12 + 4}{2} = 8;$$

eben so $a \div x = x \div b$; giebt

$$2x = a + b \text{ und } x = \frac{a+b}{2}.$$

3) Veränderungen mit einer arithmetischen Proportion lassen sich vornehmen durch Umkehrung und Versetzung der Verhältnisse, und durch Versetzung der Glieder; nur muß immer die Summe der äußeren Glieder gleich bleiben der Summe der Mittelglieder.

## §. 47.

### Von geometrischen Proportionen.

1) Wenn von Verhältnissen und Proportionen ohne Zusatz die Rede ist, so werden immer nur geometrische darunter verstanden.

2) Ein Verhältniß wird nicht geändert, wenn die beiden Glieder desselben mit einerlei Zahl multiplicirt oder dividirt werden; der Exponent des Verhältnisses verändert sich nämlich dadurch nicht (§. 17. 6.). Darauf gründet sich die Verwandlung der Bruchverhältnisse in gleiche Verhältnisse, ausgedrückt in ganzen Zahlen; eben so die Zurückführung eines Verhältnisses auf den kleineren oder kleinsten Zahlenausdruck.

$$\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = 1 : \frac{8}{3} = 3 : 8;$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{bd} = abd : bc = ad : c.$$

3) In jeder Proportion ist das Produkt der beiden äußeren Glieder gleich dem Produkte der Mittelglieder.

$$a : ae = b : be;$$

$abe = aeb$; d. h. jedes dieser beiden Produkte enthält als Faktoren das erste und dritte Glied und den Exponenten des Verhältnisses.

$$3 : 12 = 2 : 8;\quad 3 . 8 = 12 . 2 = 3 . 2 . 4 = 24.$$

4) Nach dem vorigen Satze lassen sich folgende Aufgaben lösen; nämlich in einer Proportion zu finden:

a) das erste Glied,

$x : 7 = 8 : 14;$ $x : m = b : c;$

$x \cdot 14 = 56;$ $cx = bm$, und

$x = \frac{56}{14} = 4.$ $x = \frac{bm}{c}.$

b) das zweite Glied,

$12 : x = 5 : 15;$ $a : x = m : n;$

$5x = 12 \cdot 15;$ $mx = an;$

$x = \frac{12 \cdot 15}{5} = 36.$ $x = \frac{an}{m}.$

c) das dritte Glied,

$3 : x = 7 : \frac{2}{3};$ $a : b = x : c;$

$7x = \frac{3 \cdot 2}{3} = 2;$ $bx = ac$, und

$x = \frac{2}{7}.$ $x = \frac{ac}{b}.$

d) das mittlere Glied,

$3 : x = x : 48;$ $a : x = x : b;$

$x^2 = 3 \cdot 48 = 144;$ $x^2 = ab;$

$x = \sqrt{144} = 12.$ $x = \sqrt{ab}.$

und

e) das vierte Glied,

$4 : 20 = 3 : x;$ $a : b = (a + b) : x;$

$4x = 3 \cdot 20$ und $ax = b \cdot (a + b);$

$x = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15.$ $x = \frac{b \cdot (a + b)}{a}.$

## §. 48.

### Von der Regeldetri.

1) Die sogenannte Regeldetri ist nichts anderes, als die Aufgabe, zu drei gegebenen Gliedern einer Proportion das vierte Glied zu finden. Begründet ist diese Aufgabe in §. 47. 3., und Anwendung kann sie möglicherweise da finden, wo je zwei gedachte oder wirkliche Dinge in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie zwei ähnliche zu einander es sind. Solche Verhältnisse bilden z. B. die Waaren mit ihren Preisen, die Arbeiten mit ihrem Lohne u. s. w., indem man z. B. sagen muß: je mehr Waaren, desto mehr Geld, und je weniger Waaren, desto weniger Geld. Die Größe, die unmittelbar mit der unbekannten im Verhältnisse steht, heißt die Fragezahl.

2) Wenn dagegen zwei Dinge so im Verhältnisse stehen, daß das eine Ding wächst, wenn das andere abnimmt, und umgekehrt, und es soll zu drei solchen Gliedern das vierte Glied gefunden werden, so sagt man, sie stehen im verkehrten Verhältnisse, und das Rechnen damit heißt die verkehrte Regeldetri. Solche Dinge sind z. B. Zeit und Kräfte, oder Zeit und Arbeiter; denn man muß sagen: je mehr Zeit, desto weniger Arbeiter, oder je weniger Zeit, desto mehr Kräfte sind nöthig u. s. w.

3) Ehe man also zur Auflösung einer gestellten Proportion schreiten darf, muß man die Richtigkeit und Gleichheit der gebrauchten Verhältnisse (nach 1. und 2.) untersuchen, und offenbart sich dabei ein verkehrtes Verhältniß, so setzt man die Fragezahl als erstes Glied und das entsprechende Glied dieser Stelle an die der Fragezahl, und dann löset man die Proportion wie gewöhnlich auf. Z. B.

Vier Arbeiter brauchen 12 Tage; wie viel Tage brauchen 10 Arbeiter zu derselben Arbeit?

Hier ist im Verhältniß

$$4 \text{ A.} : 12 \text{ T.} = 10 \text{ A.} : x \text{ T.}$$

Aber wenige Arbeiter brauchen viele Tage, und viele Arbeiter brauchen weniger Tage zu derselben Arbeit; also ist das letzte Verhältniß mit dem ersten ein verkehrtes, und es muß diese Proportion, wie folgt, verändert werden, nämlich:

$$10 \text{ A.} : 12 \text{ T.} = 4 \text{ A.} : x \text{ Tagen;}$$

$$\text{mithin } 10 \cdot x = 12 \cdot 4 \text{ und}$$

$$x = \frac{4 \cdot 12}{10} = 4\tfrac{4}{5} \text{ Tage.}$$

4) Sollte ein Glied, oder auch mehrere Glieder, in einer richtigen Proportion die Zahl in verschiedenen Namen enthalten, wie Ruthen, Fuße, Zolle, Thaler, Groschen u. s. w., so müssen vor der Auflösung die Benennungen der entsprechenden Glieder auf einerlei Namen gebracht werden. Am kürzesten ist dieß meist dadurch zu erreichen, daß man einen der gebrauchten Namen beibehält und die Benennung des entsprechenden Gliedes auf denselben Namen bringt, und daß man auf den Namen der Fragegröße auch den der entsprechenden bringe. Z. B.

Es gingen 160° im verjüngten Maßstabe auf 6 Dresdner Zolle; wie viel Ruthen gehen daher auf 3 Dresdner Fuß?

Hier verhält sich

$$6 \text{ Dr. Z.} : 160° = 3 \text{ Dr. F.} : x°; \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2} \text{ Dr. F.} : 160° = 3 \text{ Dr. F.} : x°; \text{ und}$$

$$\text{es ist } \tfrac{1}{2}x = 3 \cdot 160$$

$$x = 3 \cdot 160 \cdot 2 = 960°.$$

Oder:

$$3 \text{ Pfd. } 4 \text{ Loth} : 1 \text{ Thlr. } 4 \text{ gl.} = 25 \text{ Pfd.} : x \text{ Thlr.; oder}$$

$$3\tfrac{1}{8} \text{ Pfd.} : 1\tfrac{1}{6} \text{ Thlr.} = 25 \text{ Pfd.} : x \text{ Thlr.; also}$$

$$3\tfrac{1}{8}x = 25 \cdot 1\tfrac{1}{6}; \text{ und}$$

$$x = \frac{25 \cdot 1\frac{1}{6}}{3\frac{1}{8}} = \frac{25 \cdot 7 \cdot 8}{25 \cdot 6} = 9\tfrac{1}{3} \text{ Thlr.}$$

5) Die Vortheile des Rechnens, die man, um schnell und leicht zu rechnen, hier anwenden kann, sind so beschaffen, daß sie sich aus der bisher dargestellten Zahlenlehre von selbst ergeben, und daß sie wenigstens hier kein Gegenstand der Darstellung seyn können. Nur muß man nicht vergessen, daß nur die Zahl des vierten Proportionalgliedes gesucht wird, und daß dabei die Zahlen der übrigen Glieder multiplicirt werden, aber nicht die Glieder selbst.

Einige Aufgaben dürften indessen nicht überflüssig seyn.

Aufgabe I. Die $\frac{6}{4}$ellige Klafter kostet 3 Thlr. 20 gl.; wie hoch wird demnach die $\frac{9}{8}$ellige kommen?

$$\tfrac{6}{4} \text{ Ellen} : 3 \text{ Thlr. } 20 \text{ gl.} = \tfrac{9}{8} \text{ Ellen} : x \text{ Thlr.}$$

$$\tfrac{6}{4} : 3\tfrac{5}{6} = \tfrac{9}{8} : x$$

$$x = \frac{3\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{8}}{\frac{6}{4}} = \frac{23 \cdot 9 \cdot 4}{6 \cdot 8 \cdot 6} = 2\tfrac{7}{8} \text{ Thlr.} = 2 \text{ Thlr. } 21 \text{ gl.}$$

Aufgabe II. Wie viel Klaftern sind auf einem Bestande von 12 Sächs. Ackern zu erwarten, wenn auf dem Probeplatze von 40,6 □R. an $9\frac{1}{2}$ Klafter abgeschätzt wurden?

$$40{,}6 \; \square\text{R.} : 9\tfrac{1}{2} \text{ Klafter} = 12 \text{ Acker} : x \text{ Klafter; also}$$

$$40{,}6 \; \square\text{R.} : 9\tfrac{1}{2} \text{ Klafter} = 12 \cdot 300 \; \square\text{R.} : x \text{ Klafter,}$$

$$\text{und } x = \frac{9\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 300}{40{,}6} = 842\tfrac{74}{203} \text{ Klaftern.}$$

Aufgabe III. Fünf Arbeiter brauchten 18 Tage zu einer Kulturarbeit; wie lange würden 12 Arbeiter damit zubringen?

Setzt man die Proportion also an:

5 A. : 18 T. = 12 A. : x Tagen;

so brauchen wenige Arbeiter viele Tage, und viele Arbeiter wenige Tage; mithin ist das letzte Verhältniß ein verkehrtes zum ersten, und es muß die Proportion zum Berechnen des fehlenden Gliedes heißen:

12 : 18 = 5 : x Tagen, und es ist

$$x = \frac{5 \cdot 18}{12} = 7\tfrac{1}{2} \text{ Tage.}$$

Aufgabe IV. Eine Kulturarbeit würde in 30 Tagen von 12 Arbeitern vollendet werden; nun soll sie aber aus verschiedenen Gründen in 8 Tagen beendigt seyn; wie viel Arbeiter müssen täglich angestellt werden?

30 T. : 12 A. = 8 T. : x Arbeiter;

8 : 12 = 30 : x, und

$$x = \frac{12 \cdot 30}{8} = 45.$$

## §. 49.

### Von den Veränderungen an und mit Proportionen.

1) Durch Versetzung sowohl der Verhältnisse als der Glieder erhält man drei Veränderungen einer Proportion.

| | |
|---|---|
| 3 : 6 = 5 : 10 | a : ae = b : be |
| 6 : 3 = 10 : 5 | ae : a = be : b |
| 5 : 10 = 3 : 6 | b : be = a : ae |
| 10 : 5 = 6 : 3. | be : b = ae : a. |

2) Dadurch, daß man schließt, das erste Glied verhält sich zum dritten Gliede, wie das zweite zum vierten, entsteht ebenfalls eine Proportion.

$$3 : 12 = 1 : 4 \qquad a : ae = b : be$$
$$3 : 1 = 12 : 4. \qquad a : b = ae : be.$$

3) Die Summe oder der Unterschied des ersten und zweiten Gliedes verhält sich zum zweiten Gliede, wie die Summe oder der Unterschied des dritten und vierten Gliedes zum vierten Gliede.

$$3 : 6 = 4 : 8 \qquad a : ae = b : be$$
$$9 : 6 = 12 : 8. \qquad (a \pm ae) : ae = (b \pm be) : be.$$

4) Die Summe oder der Unterschied des ersten und zweiten Gliedes verhält sich zu der Summe oder dem Unterschiede des dritten und vierten Gliedes, wie das erste Glied zum dritten, oder das zweite zum vierten Gliede.

$$7 : 4 = 14 : 8 \qquad a : ae = b : be$$
$$11 : 22 = 7 : 14 = 4 : 8 \qquad (a + ae) : (b + be) = a : b = ae : be$$
$$3 : 6 = 7 : 14 = 4 : 8. \qquad (a - ae) : (b - be) = a : b = ae : be.$$

5) Bei mehreren gleichen Verhältnissen verhält sich die Summe aller Vodergieder zur Summe aller Hinterglieder, wie eines der Vodergieder zu seinem Hintergliede.

$$3 : 6 \qquad a : ae$$
$$2 : 4 \qquad b : be$$
$$5 : 10 \qquad d : de$$
$$4 : 8 \qquad (a + b + c) : (ae + be + de) = d : de \text{ u.s.w.}$$
$$14 : 28 = 3 : 6 = 2 : 4 \text{ u.s.w.}$$

6) Wenn man in zwei gegebenen Proportionen die Glieder der Ordnung nach mit einander multiplicirt oder dividirt: so geben die herausgekommenen Produkte oder Quotienten auch eine Proportion.

$$\begin{array}{rl} 12:6 = 4:2; & a:ae = b:be \\ 6:2 = 9:3; & b:c = d:g \\ \hline \text{Pr. } 72:12 = 36:6; & ab:aec = bd:beg \\ \text{Q. } 2:3 = \frac{4}{9}:\frac{2}{3} \text{ oder} & \frac{a}{b}:\frac{ae}{c} = \frac{b}{d}:\frac{be}{g}. \\ 2:3 = 4:6. & \end{array}$$

7) Stehen vier Glieder in einer Proportion, so geben die gleichen Potenzen dieser Glieder auch eine Proportion.

$$\begin{array}{ll} 2:3 = 4:6 & a:b = c:d \\ 4:9 = 16:36 & a^2:b^2 = c^2:d^2 \\ 8:27 = 64:216 \text{ u.s.w.} & a^n:b^n = c^n:d^n. \end{array}$$

8) Haben zwei und mehrere Proportionen solche Glieder, daß das zweite Glied einer Proportion das erste Glied der folgenden Proportion wird; so verhält sich das erste Glied zum letzten auf der einen Seite, wie das Produkt aller Vorderglieder zum Produkte aller Hinterglieder auf der anderen Seite.

$$\begin{array}{ll} 2:4 = 5:10 & a:b = m:n \\ 4:3 = 8:6 & b:c = q:r \\ 3:6 = 2:4 & c:d = s:t \\ \hline 2:6 = 80:240. & a:d = mqs:nrt. \end{array}$$

Dabei sagt man, das erste Verhältniß $a:d$ ist ein zusammengesetztes aus den Verhältnissen $m:n$, und $q:r$, und $s:t$.

Wären zwei Proportionen gegeben, wie

$$\begin{array}{l} a:b = m:n \text{ und} \\ b:d = m:n; \text{ also auch} \\ \hline a:d = m^2:n^2; \end{array}$$

so sagt man, $a:d$ ist im zweifachen (quadratischen) Verhältnisse mit $m:n$.

Ferner: $$\begin{array}{l} a : b = m : n \\ b : c = m : n \\ c : g = m : n \\ \hline a : g = m^3 : n^3; \end{array}$$ d. h. $a : g$ ist im dreifachen (kubischen) Verhältnisse mit $m : n$.

## §. 50.

### Anwendung der zusammengesetzten Verhältnisse auf Rechnungaufgaben.

1) Die zusammengesetzte Regeldetri hat zur Aufgabe, aus drei und mehreren Verhältnissen ein fehlendes Glied zu finden. Dazu ist es nothwendig, daß man zusammengesetzte Verhältnisse bildet, wie solche in §. 49. aufgeführt sind, daß man ferner daraus eine Gleichung bilde, und daß man das unbekannte Glied daraus entwickele.

Ist nämlich allgemein:

$$\begin{array}{l} a : b = m : n \\ c : d = n : o \\ e : f = o : p; \text{ also} \\ \hline ace : bdf = m : p; \text{ folglich} \\ acep = bdfm; \end{array}$$

wäre nun $b$ das gesuchte Glied, so würde seyn

$$b = \frac{acep}{dfm};$$

eben so $$p = \frac{bdfm}{ace}.$$

Z. B. Es haben 3 Arbeiter in 7 Tagen bei täglich 10 Stunden Arbeit einen Graben von 7 Ruthen Länge vollendet; wie viel werden 16 Arbeiter in 14 Tagen bei täglich 12 Stunden Arbeit vollenden können?

$$\begin{array}{rcl} 3\ \text{A.} : 16\ \text{A.} & = & 7^\circ : x \\ 10\ \text{St.} : 12\ \text{St.} & = & x : y \\ 7\ \text{T.} : 14\ \text{T.} & = & y : z\ \text{Ruthen} \\ \hline 3.10.7 : 16.12.14 & = & 7 : z;\ \text{und} \\ z & = & 89\tfrac{3}{5}. \end{array}$$

2) Die Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri lassen sich etwas bequemer nach folgender allgemeinen (der sogenannten Reesischen) Regel lösen:

Neben die Fragegröße schreibe man rechts die Größe, welche mit der Fragegröße gleichen Namen hat, dann setze man unter diese letzte Größe alle diejenigen Verhältnißglieder, welche sich auf die Frage beziehen, und diesen Größen gegenüber unter die Fragegröße bringe man die gleichnamigen Verhältnißglieder. Hierauf untersuche man jedes Verhältniß (nach §. 48. 2.), ob etwa eins in Absicht auf das erste Verhältniß ein verkehrtes sey, und ist dieses der Fall, so kehrt man ein solches um. Endlich giebt das Produkt der Vorderglieder dividirt in das der Hinterglieder einen Quotienten, der gleich der Fragegröße ist.

So käme das vorige Beispiel folgendermaßen zu stehen:

$$\begin{array}{rcl} x & : & 7^\circ \\ 3 & : & 16\ \text{A.} \\ 7 & : & 14\ \text{T.} \\ 10 & : & 12\ \text{St.} \\ \hline \end{array}$$

$$x = \frac{7.16.14.12}{3.7.10} = 89\tfrac{3}{5}{}^\circ.$$

Auch kann man vor der Multiplikation je zwei zu beiden Seiten stehende Glieder durch Division mit einem gemeinschaftlichen Faktor aufheben; oder sind Brüche dabei, so darf man nur den Zähler auf dieser Seite beibehalten

und den Nenner als Faktor auf die entgegengesetzte Seite setzen.

Z. B. In 3 Tagen waren mit 16 Arbeitern $1\frac{1}{3}$ Morgen, bei täglich 10 Stunden Arbeit, kultivirt worden; wie viele Arbeiter würde man in 6 Tagen zu 6 Morgen, bei täglich 12 Stunden Arbeit, gebrauchen?

| | | | |
|---|---|---|---|
| x Arb. | : 16 Arb. | Viele Arbeiter | wenig Arbeiter; |
| $1\frac{1}{3}$ | : 6 Morg. | viel Morgen | wenig Morgen; |
| 3 | : 6 Tage; | wenig Tage | viel Tage (ein verkehrtes Verhältniß); |
| 10 | : 12 St. | wenig Stunden | viel Stunden (desgl.) |

6 : 3 T.
12 : 10 St.
4 : 3

$$x = \frac{16 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 3}{6 \cdot 12 \cdot 4} = 30 \text{ Arbeitern.}$$

Aufgabe I. Wie viel Pflüge braucht man in 7 Tagen zu $204\frac{3}{4}$ Morgen, wenn mit 2 Pflügen täglich $3\frac{1}{4}$ Morgen zu einem gewissen Zwecke aufgerissen werden können?

Antwort: 7 Pflüge.

Aufgabe II. Wie viel Zinsen bringen 358 Thlr. in 4 Monaten bei $6\frac{1}{2}$ Prozent?

Antwort: 7 Thlr. $18\frac{4}{25}$ gl.

3) Ist die zusammengesetzte Regeldetri aus Verhältnissen der Gleichheit gebildet, so läßt sich die Auflösung solcher Aufgaben leicht durch den sogenannten Kettensatz führen, d. h.

neben die Fragegröße schreibt man das, wonach gefragt wird, dann ist immer das folgende Glied unter der Frage von demselben Namen, womit das nächste

vorhergehende Glied bezeichnet war, und man hört erst auf mit dem Namen, mit welchem in der Fragegröße angefangen wurde. Dann ist wieder das Produkt der Glieder unter der Fragegröße, dividirt in das Produkt der Glieder auf der anderen Seite, ein Quotient, der gleich der Fragegröße ist.

Das Aufheben der Glieder und das Wegschaffen der Brüche kann wieder wie vorhin bei der allgemeinen Regel geschehen. — Am häufigsten kommt dieses Rechnen vor bei Umwandlung der Geldsorten in einander, bei Verwandlung der Längen-, Flächen- und Körper-Maße eines Landes in die ähnlichen eines anderen Landes, eben so der Gewichte.

Aufgabe I. Wie viel Rheinische Ruthen betragen 50 Ruthen Dresdner Maß, wenn die Rheinische Ruthe 12 und die Dresdner $15\frac{7}{8}$ Fuß, und ein Rheinischer Fuß 139 und der Dresdner 125 Pariser Linien enthält?

| | | |
|---|---|---|
| ? Rhein. Ruthen | | 50 Dresdner Ruthen |
| 1° | = | $15\frac{7}{8}$ „ „ Fuß |
| 1′ | = | 125 Pariser Linien |
| 139‴ | = | 1 Rhein. Fuß |
| 12′ | = | 1 Rhein. Ruthe |
| 6 | | 91 |

$$x = \frac{50 \cdot 125 \cdot 91}{139 \cdot 12 \cdot 6} = 56 \text{ Rhein. Ruthen.}$$

Aufgabe II. Wenn der Sächs. Speciesthaler zu 6 Zwanzigkreuzern, und 5 Zwanzigkreuzer zu 2 Rhein. Gulden gerechnet werden, wie viel betragen 260 Speciesthaler in Rhein. Gulden?

Antwort: 624 Rhein. Gulden.

4) Die Gesellschaft- oder Vertheilungs-, auch Vermischung-Rechnung gründet sich auf §. 49. 5., indem man bei gleichen Verhältnissen schließen darf: die Summe aller einzelnen Antheile verhält sich zum Ganzen, wie ein Antheil zu seinem Verhältnißgliede des Ganzen. Aus solchen Proportionen läßt sich dann je ein fehlendes Glied berechnen.

Aufgabe I. Mit einer Summe, wozu A 500 Thlr. auf 2 Jahre, B aber 800 Thlr. auf 4 Jahre und C noch 1000 Thlr. auf 3 Jahre gegeben hatte, wurden 420 Thlr. gewonnen; wie viel bekommt jeder dieser Theilnehmer vom Gewinne?

Hier ist 500 Thlr. auf 2 Jahre = 1000 Thlr. auf 1 Jahr;
eben so 800 - - 4 - = 3200 - - 1 -
und 1000 - - 3 - = 3000 - - 1 -
also die ganze Summe = 7200,

und es verhält sich:

$7200 : 420 = 1000 : x$; und $x = 58\frac{1}{3}$;
$7200 : 420 = 3200 : y$; - $y = 186\frac{2}{3}$;
$7200 : 420 = 3000 : z$; - $z = 175$.

Aufgabe II. Drei Arbeiter haben zusammen 40 Thlr. verdient, indem der erste 60 Tage zu täglich 12 Stunden, der zweite 40 Tage zu täglich 10 Stunden, und der dritte 32 Tage zu täglich 8 Stunden gearbeitet hat; wie viel bekommt jeder?

Hier hat der erste für $60 \cdot 12 = 720$ Stunden,
der zweite - $40 \cdot 10 = 400$ -
und der dritte - $32 \cdot 8 = 256$ -

zu fodern, und alle zusammen 1376 Stunden, und es verhält sich:

$1376 : 40 = 720 : x; \quad x = 20\tfrac{40}{43}$ Thlr.
$1376 : 40 = 400 : y; \quad y = 11\tfrac{27}{43}$ "
$1376 : 40 = 256 : z; \quad z = 7\tfrac{19}{43}$ "

Aufgabe III. Es sollen 300 Klaftern so in drei Beständen A, B und C geschlagen werden, daß, so oft 3 Klaftern in A, eben so 5 in B und 7 in C abgetrieben werden; wie viel kommt auf jeden Antheil?

Alle Antheile müssen hier $3 + 5 + 7 = 15$ seyn; folglich verhält sich:

$15 : 300 = 3 : x$; und $x = 60$ Klaft. in A;
$15 : 300 = 5 : y$; " $y = 100$ " " B;
$15 : 300 = 7 : z$; " $z = 140$ " " C.

Zusatz. Will man nicht so viele Proportionen ansetzen, als Glieder zu suchen sind, so darf man nur aus dem ersten oder Grund-Verhältnisse den Werth für 1 berechnen, und diesen mit der Zahl des jedesmaligen Antheils multipliciren. Z. B.

Aufgabe IV. Ein zu 5000 Klaftern abgeschätzter Bestand soll in den nächsten 4 Jahren so abgetrieben werden, daß sich die abgetriebenen Holzmassen der Zeitfolge nach wie 3, 4, 5 und 8 verhalten.

Demnach ist $3 + 4 + 5 + 8 = 20$, und es verhält sich $20 : 500 = 1 : x$; also $x = 25$; und es werden abgetrieben:

im ersten Jahre $3x = 75$ Klaftern;
" zweiten " $4x = 100$ "
" dritten " $5x = 125$ " und
" vierten " $8x = 200$ "

Anmerk. Daß man das erste oder das Grund-Verhältniß in einen für die Berechnung bequemen Zahlenausdruck verwandeln könne, versteht sich von selbst.

## §. 51.

### Von den Reihen im Allgemeinen.

1) Wenn drei und mehr Zahlen so mit einander verbunden sind, daß jede folgende Zahl mit der nächst vorhergehenden in gleichem Verhältnisse steht, so machen diese Zahlen eine Reihe (Progression) aus. So wie es aber arithmetische und geometrische Verhältnisse (§. 45.) gab, so giebt es nun auch arithmetische und geometrische Reihen.

2) Die einzelnen Zahlen in der Reihe nennt man Glieder der Reihe; und zählt man die Glieder vom ersten Gliede an, so heißt diese Zahl der Zeiger der Reihe. Dieser Zeiger wird da, wo er ausgedrückt werden soll, senkrecht über sein Glied der Reihe gesetzt.

3) Die Reihe selbst wird auch eine steigende oder fallende genannt, je nachdem das folgende Glied immer größer oder kleiner als das vorhergehende ist.

## §. 52.

### Von arithmetischen Reihen.

1) Da je zwei auf einander folgende Glieder der arithmetischen Reihe ein und dasselbe arithmetische Verhältniß ausmachen, so gehört nur das erste Glied a und der Name des Verhältnisses d dazu, um allgemein diese Reihe zu bilden; nämlich:

$$\div \overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},\ \overset{5}{a+4d}\ldots\overset{n}{u};$$

$$\div \overset{1}{3},\ \overset{2}{5},\ \overset{3}{7},\ \overset{4}{9},\ \overset{5}{11},\ \overset{6}{13}\ldots$$

2) Aus dem ersten Gliede a und dem Namen des Verhältnisses d nebst dem Zeiger n ist das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe:

$$u = a + (n - 1)\, d,$$

so daß jede Zahl für n gesetzt, jedes Glied einer solchen Reihe gefunden werden kann. Wäre daher $a = 3$ und $d = 5$, so ist das achte Glied $= 3 + 7 \cdot 5 = 38$.

3) Aus dem Begriffe der arithmetischen Reihe folgt auch, daß je drei auf einander folgende, oder gleichen Abstand von einander habende Glieder eine stetige Proportion ausmachen, und daß je 4 Glieder von gleichem Abstande eine getrennte arithmetische Proportion geben.

Z. B. $\div \overset{1}{3}, \overset{2}{7}, \overset{3}{11}, \overset{4}{15}, \overset{5}{19}, \overset{6}{23}, \overset{7}{27}\ldots\overset{n}{u};$

$$7 - 15 = 15 - 23;\ 7 - 15 = 19 - 27.$$

4) Da nun bei ungerader Zahl der Glieder sich verhält: $a - M = M - u;$

so ist das Mittelglied $M = \frac{a + u}{2}$.

5) In jeder arithmetischen Reihe, wo wieder a das erste, u das letzte Glied, und n die Zahl der Glieder, und d den Namen des Verhältnisses bedeutet, ist die Summe aller Glieder:

$$S = \frac{a + u}{2} \cdot n;\ \text{oder}$$

$$S = \frac{a + (n - 1)\, d}{2} \cdot n.$$

6) Aus den Formeln in 2. und 5. lassen sich alle Aufgaben leicht lösen, die man für diese Reihen aufstellen kann. Z. B.

a) Das erste Glied einer arithmetischen Reihe war $a = 2$, das letzte Glied $u = 32$, und die Zahl der Glieder $n = 11$; wie viel beträgt die Summe dieser Reihe?

Hier ist $s = \frac{2 + 32}{2} \cdot 11 = 187$.

b) Wenn das erste Glied $a = 7$, das letzte $u = 35$, und die Zahl der Glieder $n = 8$; wie viel ist der Name des Verhältnisses $d$?

Aus 2. folgt $\frac{u - a}{n - 1} = d = \frac{35 - 7}{8 - 1} = 4$.

und

c) Wenn in der ersten Baumreihe 48 Stämme, in jeder folgenden aber 2 mehr, und in der letzten 96 standen; wie viel waren es Baumreihen, und wie groß ist die Summe aller Stämme?

Aus 2. folgt wieder $n = \frac{u - a + d}{d} = 25$;

und nach 5. ist $s = \frac{48 + 96}{2} \cdot n = 1800$.

## §. 53.

### Von den geometrischen Reihen.

1) Da in einer geometrischen Reihe (oder Reihe, Progression, ohne Beiwort) je zwei auf einander folgende Glieder ein und dasselbe Verhältniß ausmachen, so wird sie steigend oder fallend, je nachdem der Exponent des Verhältnisses größer oder kleiner als die Einheit ist.

$$\div\ 3 \,.\, 6 \,.\, 12 \,.\, 24 \,.\, 48 \,.\, 96 \ldots$$

$$\div\ 24 \,.\, 6 \,.\, 1\tfrac{1}{2} \,.\, \tfrac{3}{8} \,.\, \tfrac{3}{32} \,.\, \tfrac{3}{128} \ldots$$

2) Bedeutet a das erste und u das letzte Glied, n die Zahl der Glieder, und e den Exponenten des Verhältnisses, so ist die allgemeine Form der Reihe:

$$\div\ \overset{1}{a} \,.\, \overset{2}{ae} \,.\, \overset{3}{ae^2} \,.\, \overset{4}{ae^3} \,.\, \overset{5}{ae^4} \ldots \overset{n}{u}.$$

Daraus folgt zugleich, daß jedes Glied der Reihe ein Produkt ist aus dem ersten Gliede a und einer Potenz von e, deren Exponent dem Zeiger dieses Gliedes weniger Eins gleich ist. Da man nun je ein Glied der Reihe als letztes vorstellen kann, so ist das $n^{te}$ Glied jedesmal $u = ae^{n-1}$.

3) Aus dem Begriffe der Reihe folgt auch, daß

a) drei zunächst auf einander folgende Glieder, und je drei Glieder von gleichem Abstande eine stetige Proportion ausmachen;

b) vier Glieder, wovon die beiden ersten einerlei Abstand wie die beiden letzten haben, eine getrennte Proportion geben; und

c) daß, wenn man jedes Glied der Reihe vom nächst folgenden subtrahirt, die Unterschiede eine neue Reihe mit gleichem Exponenten des Verhältnisses geben ꝛc.

4) Nennt man die Summe der Reihe S, und setzt man allgemein $S = a + ae + ae^2 + ae^3 + ae^e \ldots a^{n-1}$, und multiplicirt diese Gleichung mit e, und subtrahirt sie von der dadurch erhaltenen Gleichung, so ist

$$Se - S = ae^n - a; \text{ folglich}$$

$$S = \frac{ae^n - a}{e - 1} = \frac{e^n - 1}{e - 1} \cdot a.$$

5) Aus den Grundgleichungen in 2. und 4. lassen sich aus den gegebenen und bestimmenden Stücken allgemeine Werthe finden, um die hierher gehörigen Aufgaben zu lösen.

So z. B. aus u, e und n ist $a = \frac{u}{e^{n-1}}$;

aus a, u und n ist $e = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$;

aus a, u und S ist $e = \frac{S - a}{S - u}$.

Aufgabe I. Eine Reihe von sieben Gliedern hat zum letzten Gliede 192 erhalten, weil jedes folgende Glied das Doppelte des vorhergehenden war; wie groß ist das erste Glied gewesen?

Antwort: $\frac{192}{2^{7-1}} = 3$.

Aufgabe II. Wenn das erste Glied einer Reihe 6, und jedes folgende Glied 4mal größer war, wie viel mußte das 12te Glied betragen?

Antwort: $6 \cdot 4^{11} = 25165824$.

Aufgabe III. Das erste Glied einer Reihe war 1, und das 15te nur 16384; wie viel müßte der Exponent des Verhältnisses gewesen seyn?

Antwort: $\sqrt[14]{16384} = 2$.

Aufgabe IV. Wie viel beträgt die Summe einer Reihe, deren erstes Glied 50 war, und die bei dem Exponenten des Verhältnisses 2 auf 20 Glieder angewachsen ist?

Antwort: $(2^{20} - 1) \cdot 50 = 52428750$.

# Anhang.

Enthaltend

die Zins- und Renten-Rechnung.

## A.

## Vom einfachen Zins und dessen Berechnung.

### I.

Wenn ein baares Kapital, oder der Werth eines Kapitals, zur Benutzung gegeben ist, so nennt man das den Zins (das Interesse), was im Verlauf einer bestimmten Zeit dafür gegeben wird. Trägt man diesen Zins am Ende der bestimmten Zeit, gewöhnlich eines ganzen Jahres, jedesmal ab, oder rechnet man ihn nur nicht zum Kapitale, so heißt dieses der einfache Zins. Das Grundkapital wird aber ein solches genannt, dessen Zins $= 1$ ist.

### II.

Der Zins vom Kapitale 100 in einem Jahre heißt das Procent, und der Zins vom Kapitale 1 heißt der Zinsfuß. Dieser Zinsfuß ist für eine leichte Berechnung der Zinsen sehr nützlich, und er wird jedesmal erhalten, wenn man mit 100 in das geltende Procent dividirt. So ist bei 5 Procent

$$100 : 5 = 1 : \tfrac{5}{100};$$

der Zinsfuß $= \tfrac{5}{100} = 0{,}05$; bei 4 Procent ist der Zinsfuß $= 0{,}04$, und bei $4\tfrac{1}{2}$ Procent $= 0{,}045$ u. s. w.

Behält man den ordentlichen Bruch für den Zinsfuß bei, und hebt ihn durch Division mit dem Zähler auf, so läßt sich schon an diesem aufgehobenen Bruche erkennen:

a) den wie vielten Theil eines Kapitals die Zinsen betragen; z. B. bei 4 Procent ist der Zinsfuß $= \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$; und

b) in wie viel Jahren die Summe der Zinsen so groß seyn wird, als das Kapital selbst. Z. B. bei 5 Procent ist der Zinsfuß $= \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

## III.

Nennt man ein baares Kapital $= a$, und bei einem bestimmten Procente den daraus erhaltenen Zinsfuß $= u$, so ist das Produkt $au$ gleich dem einjährigen Zinse von $a$, weil $1 : u = a : au$. Multiplicirt man diesen einjährigen Zins mit der Zahl der Jahre $= n$, so müssen die $n$jährigen Zinsen $i$ folgende seyn:

$$i = a \cdot u \cdot n.$$

Z. B. Wie viel Zinsen geben 120 Thlr. bei $4\frac{1}{2}$ Procent in 10 Jahren?

Hier ist $a = 120$; $u = 0{,}045$ und $n = 10$; also die Zinsen

$$i = 120 \cdot 0{,}045 \cdot 10 = 54 \text{ Thlr.}$$

Oder: Wie viel Zinsen bringen 280 Thlr. bei 5 Procent in 3 Monaten?

Jetzt ist $a = 280$; $u = 0{,}05$ und $n = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ Jahr; also die Zinsen

$$i = 280 \cdot 0{,}05 \cdot \tfrac{1}{4} = 3\tfrac{1}{2} \text{ Thlr.}$$

## IV.

Nach der vorigen Gleichung $i = aun$ läßt sich immer aus drei bekannten Gliedern das vierte Glied finden, indem man das unbekannte Glied auf eine Seite allein bringt. Z. B.

1) $a = \frac{i}{un}$; wie groß muß ein Kapital seyn, das zu 4 Procent in 3 Jahren 75½ Thlr. Zinsen bringen soll?

Hier ist $u = 0{,}04$; $n = 3$ und $i = 75{,}5$; also das Kapital $a = \frac{75{,}5}{0{,}04 \cdot 3} = 629\frac{1}{6}$ Thlr.

2) $u = \frac{i}{an}$; wie viel Procent nahm ein Wucherer, der sich wöchentlich 1 gl. vom Thaler bezahlen ließ?

Hier ist $a = 1$ Thlr; $n = \frac{1}{52}$ Jahr und $i = \frac{1}{24}$ Thlr.; folglich $u = \frac{\frac{1}{24}}{1 \cdot \frac{1}{52}} = 2{,}166$; dieses, mit 100 multiplicirt, giebt über 216½ Procente.

3) $n = \frac{i}{au}$; wie lange müssen 500 Thlr. zu 6 Procent gestanden haben, daß die Zinsen 135 Thlr. betragen konnten?

Da $a = 500$, $u = 0{,}06$ und $i = 135$ ist, so muß $n = \frac{135}{30} = 4\frac{1}{2}$ Jahre seyn.

## V.

Setzt man ähnlich dem vorigen Kapitale a, ein anderes Kapital $= b$, und eben so dessen Zinsfuß $= v$, Zahl der Jahre $= m$, und Zinsen $= k$; so muß aus den nämlichen Gründen $k = bvm$ seyn, und es verhält sich

$$i : k = aun : bvm.$$

Dadurch erhält man eine neue Gleichung

$$ibvm = kaun.$$

Sind nun bei einer Aufgabe zwei oder mehrere Glieder dieser Gleichung einander gleich, so kann man diese gegenseitig ausstreichen, und dann läßt sich leicht das fehlende Glied aus den übrigen Gliedern bestimmen. Z. B.

Wie groß muß ein Kapital seyn, das bei 4 Procent in gleicher Zeit eben so viele Zinsen bringt, als 600 Thlr. bei $5\frac{1}{2}$ Procent?

Hier ist $a = x$; $b = 600$
$u = 0{,}04$; $v = 0{,}055$
$n = m$
und $i = k$
also nach obiger Gleichung ist noch
$bv = au$;

mithin $a = \frac{bv}{u} = \frac{600 \cdot 0{,}055}{0{,}04} = 825$ Thlr.

## VI.

Hat ein Kapital eine gewisse Anzahl von Jahren auf einfache Zinsen gestanden, ohne daß diese Zinsen jährlich abgetragen wurden, so heißt am Ende der Zeit die Summe, aus Kapital und Zinsen, der künftige Werth des Kapitals. Sind nun vom Kapital a (nach III.) die njährigen Zinsen $i = aun$, so ist der künftige Werth

$$A = a + i = a + aun;$$

oder besser ausgedrückt:

$$A = a \cdot (1 + un).$$

Z. B. Wie groß ist der künftige Werth von 248 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ Procent nach 10 Jahren?

Da $a = 248$, $n = 10$ und $u = 0{,}045$ ist, so muß seyn $A = 248 \cdot 1{,}45 = 359\frac{3}{5}$ Thlr.

## VII.

Wäre in der vorigen Gleichung zwar der künftige Werth, aber nicht der baare bekannt, so würde seyn:

$$a = \frac{A}{1 + un};$$ d. h. den baaren Werth finden, oder eine Summe A discontiren auf n Jahre beim Zinsfuß $= u$.

Z. B. Wie groß muß ein Kapital seyn, das in 12 Jahren bei $3\frac{1}{2}$ Procent den Werth von 6035 Thlr. haben soll?

Hier ist $A = 6035$; $n = 12$; $u = 0{,}035$; also

$$a = \frac{6035}{1{,}42} = 4250 \text{ Thlr.}$$

VIII.

Aus der Gleichung in VI. läßt sich auch die Zahl der Jahre n oder das Procent $u \cdot 100$ berechnen, indem man dieselbe nur für diese Buchstaben auflöset; nämlich:

$$n = \frac{A - a}{au}; \text{ und } u = \frac{A - a}{an}.$$

Z. B. Wie lange haben 320 Thlr. zu $4\frac{1}{2}$ Procent auf einfache Zinsen gestanden, daß sie den Werth von 536 Thlr. erhalten konnten?

Hier ist $a = 320$; $A = 536$; $u = 0{,}045$; also

$$n = \frac{536 - 320}{320 \cdot 0{,}045} = 15 \text{ Jahre.}$$

IX.

Hat ein baares Kapital a bei dem Zinsfuße u den künftigen Werth A erhalten, so nennt man den Unterschied dieser beiden Werthe, $A - a = d$, den **Rabatt** oder **Erlaß**. Setzt man $a = \frac{A}{1 + nu}$, und subtrahirt diesen Werth statt a von A, so ist allgemein aus A, n und u der Erlaß

$$d = A \cdot \frac{nu}{1 + nu}.$$

Z. B. Wie viel Erlaß muß man bei 20 Procent geben, wenn eine nach 10 Jahren fällige Summe von 4000 Thlr. jetzt ausgezahlt wird?

Hier ist $\left.\begin{array}{l} A = 4000 \\ u = \ \ 0,2 \\ n = \ \ 10 \end{array}\right\}$ also $d = 4000 \cdot \frac{2}{3} = 2666\frac{2}{3}$ Thlr.

Anmerk. Anwendungen dieser einfachen Zinsrechnung werden nicht blos bei Kapitalen, die ausgeliehen, oder benutzt, oder verglichen und umgesetzt werden sollen, sondern auch bei wirklichen und gedachten Dingen, die wie Kapitale zuwachsen.

---

## B.

## Vom Zinszins und dessen Berechnung.

### X.

Wenn am Ende eines jeden Jahres die Zinsen eines Kapitals nicht als abgetragen angesehen, sondern wieder zum Kapitale geschlagen und mit diesem verzinset werden: so heißt der Ertrag eines solchen Kapitals nach n Jahren der Zinszins, oder zusammengesetzter Zins, auch Zins vom Zins. Die Berechnung des Zinszinses wird aber nicht blos bei Kapitalen, sondern allgemein da angewendet, wo irgend eine Größe so zunimmt, wie der Zinszins bei einem Kapitale, so daß man bei gleichen Voraussetzungen auch gleiches Rechnen anwendet; z. B. bei Werthbestimmungen in Kauf und Tausch, beim Zuwachs der Bäume u. s. w. — Daß es gesetzlich nicht erlaubt ist, Geld auf Zinszins auszuleihen, hat seinen guten Grund — nur hindert dieß die Aufstellung und Anwendung dieser Zinszinsrechnung nicht bei anderen Dingen, die keine ausgeliehenen Gelder sind.

## XI.

Heißt hier wieder, wie in der einfachen Zinsrechnung ein baares Kapital a, dessen künftiger Werth A beim Zinsfuße u und der Zahl der Jahre n: so kommt der künftige Werth von a am Ende des ersten Jahres heraus, wenn man a mit $(1 + u)$ multiplicirt; und weil nun dieses Produkt das Kapital für das nächste Jahr ist, so müßte solches wieder am Ende des Jahres mit $(1 + u)$ multiplicirt werden, und so am Ende jedes folgenden Jahres. Demnach erhält:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| im 1st. Jahre | a | den künft. Werth | $= a.(1+u)$; | |
| ⸗ 2ten | ⸗ $a.(1+u)$ | ⸗ ⸗ ⸗ | $= a.(1+u).(1+u) =$ | |
| | | | $= a.(1+u)^2$; | |
| ⸗ 3ten | ⸗ $a.(1+u)^2$ | ⸗ ⸗ ⸗ | $= a.(1+u)^2.(1+u) =$ | |
| | | | $= a.(1+u)^3$; | |
| ⸗ 4ten | ⸗ $a.(1+u)^3$ | ⸗ ⸗ ⸗ | $= a.(1+u)^3.(1+u) =$ | |
| | | | $= a.(1+u)^4$; | |
| ⸗ nten | ⸗ a | ⸗ ⸗ ⸗ | $= a.(1+u)^n$; | |

mithin ist allgemein von einem auf Zinszins stehenden Kapitale a in n Jahren der künftige Werth

$$A = a\,.\,(1+u)^n; \text{ oder}$$
$$\log.\ A = \log.\ a + n\,.\,\log.\ (1+u).$$

**Aufgabe I.** Wie viel sind 350 Thlr. nach 20 Jahren auf Zinszins zu $4\frac{1}{2}$ Procent werth?

Hier ist $a = 350$, $n = 20$ und $1 + u = 1{,}045$ also

$\log.\ 1{,}045 = 0{,}0191163$ mal (20

$0{,}3823260$

$\log.\ 350 = 2{,}5440680$

$\log.\ A = 2{,}9263940$ und

der künftige Werth $A = 844$ Thlr.

Aufgabe II. Ein Bestand ist zu 400 Klaftern bei 2 Procent Zuwachs abgeschätzt; wie viel läßt sich Holzmasse in 30 Jahren erwarten?

Antwort: 724 Klaftern.

Aufgabe III. Wenn auf ein vor 10 Jahren geborgtes Kapital von 7963 Thlr. zu 5 Procent vor 8 Jahren ein anderes Kapital von 6498 Thlr. abgetragen wurde, wie viel ist der Rest der Schuld?

Wie hier $a = 7963$, $1 + u = 1{,}05$ und $n = 10$ ist, so nenne man $b = 6498$, $1 + u = 1{,}05$ und $m = 8$;

folglich $A = 12970$ Thlr. und $B = 9600$ Thlr.

und der Rest der Schuld $= A - B = 3370$ Thlr.

XII.

Aus der vorigen Gleichung $A = a(1 + u)^n$ folgt auch, daß von einer nach n Jahren fälligen Summe A der baare Werth a gefunden wird, wenn man sagt:

$$a = \frac{A}{(1 + u)^n};\ \text{oder}$$

$$\log. a = \log. A - n\,.\,\log. (1 + u).$$

Aufgabe I. Bei einer Versteigerung wurden 6000 Thlr., aber erst nach 8 Jahren zahlbar, geboten; wie viel beträgt der baare Werth dieses Gebots bei Zinszins zu $3\frac{1}{2}$ Procent?

Hier ist $A = 6000$, $n = 8$ und $1 + u = 1{,}035$

$$\begin{array}{r} \log. 6000 = 3{,}7781513 \\ -8 . \log. 1{,}035 = 0{,}1195224 \\ \hline \log. a = 3{,}6586289 \end{array}$$

und der baare Werth $a = 4556$ Thlr.

Aufgabe II. Ein Waldstück wird nach 20 Jahren 1000 Thlr. werth seyn; wie viel kann man jetzt dafür geben, wenn das anzulegende Kapital auf Zinszins zu $3\frac{1}{2}$ Procent stehen sollte?

Antwort: 502 Thlr.

XIII.

Hat ein Kapital a durch Zinszins den Werth A beim Zinsfuße u erhalten, und man soll die Zahl der Jahre n finden: so verwandelt man die Gleichung $A = a.(1+u)^n$ in eine logarithmische $\log. A = \log. a + n . \log. (1+u)$, subtrahirt beiderseits log. a, und dividirt eben so mit $\log. (1+u)$, und man erhält

$$n = \frac{\log. A - \log. a}{\log. (1+u)}.$$

Aufgabe I. Wie lange haben 24610 Thlr. auf Zinszins zu 2 Procent gestanden, daß sie zu 30000 Thlr. anwachsen konnten?

Hier ist $a = 24610$; $\log. A - \log. a = 0{,}0860097$
$A = 30000$ und $\log. (1+u) = 0{,}0086002$
$1+u = 1{,}02$;

folglich $n = \frac{0{,}0860097}{0{,}0086002} = \frac{860097}{86002} = 10$ Jahre.

Aufgabe II. In welcher Zeit hat ein Kapital bei 4 Procent auf Zinszins den doppelten Werth erreicht?

Antwort: In $\frac{\log. 2}{\log. 1{,}04} = 17$ Jahren und einigen Monaten.

XIV.

Ist ein Kapital a und dessen durch Zinszins entstandener künftiger Werth A, und die Zahl der Jahre n be-

kannt, und man soll das Procent finden, so hat man nach der vorigen Gleichung

$$\log. (1 + u) = \frac{\log. A - \log. a}{n}.$$

Sucht man nun zu log. (1 + u) die natürliche Zahl, subtrahirt Eins davon, und multiplicirt den Rest mit 100, so erhält man das Procent.

Aufgabe I. Es hat Jemand 625 Thlr. geborgt, und dafür einen Schuldbrief von 850 Thlr. nach 3 Jahren ohne Zins zahlbar ausgestellt; wie viel Procent auf Zinszins giebt er?

Hier ist $a = 625$; also $\log. A = 2{,}9294189$
$A = 850$ $\quad - \log. a = 2{,}7958800$
$n = 3$ $\quad 3:)\ 0{,}1335389$
$\log. 1 + u = 0{,}0445129$
also $1 + u = 1{,}1078$; $u = 0{,}1078$ und
das Procent $= 10{,}78$ oder zwischen $10\frac{3}{4}$ und $10\frac{4}{5}$.

Aufgabe II. Ein Bestand von 1200 Klaftern hat in 20 Jahren um 766,24 Klaftern zugenommen; wie viel ist das Procent des Wachsthums gewesen?

Antwort: Weil hier $a = 1200$ und $A = 1200 + 766{,}24 = 1966{,}24$; also $u = 0{,}025$ und das Procent $= 2\frac{1}{2}$.

## XV.

Wenn man zwei Kapitale in Absicht auf Zinszins vergleichen, und aus einigen bekannten Gliedern ein fehlendes Glied berechnen will, so benennt man die Glieder des zweiten Kapitals mit den folgenden Buchstaben auf ähnliche Weise wie seither.

Es sey daher eines zweiten Kapitals baarer Werth $= b$, dessen künftiger Werth $= B$, die Zahl der Jahre $= m$, und dessen Zinsfuß $= v$, so daß jedesmal $B = b(1 + v)^m$ ist, wie $A = a(1 + u)^n$ war, und sich verhält $A : B = a(1 + u)^n : b(1 + v)^m$; folglich die Gleichung entsteht:

$$A \cdot b \cdot (1 + v)^m = B \cdot a \cdot (1 + u)^n.$$

Sind nun bei der Vergleichung zweier Kapitale je zwei ihrer entsprechenden Glieder gleich, so dividirt man diese Gleichung mit den gleichen Gliedern und löset dann die gebliebene Gleichung für ein gesuchtes Glied auf, wodurch sich mehrere wichtige Aufgaben lösen lassen. Z. B.

Aufgabe I. Wie groß muß ein Kapital seyn, das bei $3\frac{1}{2}$ Procent nach 12 Jahren eben so viel werth ist, als 1000 Thlr. zu 4 Procent nach 20 Jahren, und zwar beide Kapitale auf Zinszins gesetzt?

Hier ist $A = B$; also $a(1 + u)^n = b(1 + v)^m$;
ferner $a = x$; $b = 1000$
$1 + u = 1{,}035$; $1 + v = 1{,}04$ und
$n = 12$; $m = 20$; folglich

$$a = \frac{1000 \cdot 1{,}04^{20}}{1{,}035^{12}} = 1450 \text{ Thlr.}$$

Aufgabe II. Wie lange müssen 36 Thlr. auf Zinszins stehen, um bei 5 Procent eben so viel werth zu seyn, als 300 Thlr. zu 4 Procent auf Zinszins in 8 Jahren?

Antwort: $n = 49{,}8$ oder 49 Jahre und einige Monate.

## XVI.

Wird ein Kapital $a$, das $n$ Jahre auf Zinszins steht, und dadurch den Werth $A$ erhält, während dieser Zeit

am Ende eines jeden Jahres durch ein anderes Kapital b vermehrt, und es sollen die Werthe dieser jährlichen Vermehrungen, auch auf Zinszins stehend, am Ende der ganzen Zeit gefunden werden: so steht

die erste Vermehrung n — 1 Jahr,
" zweite " n — 2 "
" dritte " n — 3 . . .
" vorletzte " 1 Jahr, und
" letzte " Null Jahre;

folglich ist der Gesammt-Werth

$$B = b.(1+u)^{n-1} + b.(1+u)^{n-2} + b.(1+u)^{n-3} \dots + b.(1+u) + b.$$

Es war aber in einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied $= 1$, und deren letztes Glied $= e^{n-1}$ ist, die Summe der Glieder allgemein $= \frac{e^n - 1}{e - 1}$; mithin ist auch der obige Werth der Glieder für

$$B = \frac{b.(1+u)^n - 1}{(1+u) - 1}; \text{ oder auch}$$

$$B = \frac{b}{u}.[(1+u)^n - 1].$$

Demnach wäre der endliche Werth für a und b folgender:

$$A + B = a.(1+u)^n + \frac{b}{u}.[(1+u)^n - 1].$$

Z. B. Ein Kapital von 3000 Thlr. wird auf Zinszins zu 4 Proc. gerechnet, und am Ende jedes Jahres um 500 Thlr. vermehrt; wie groß ist der Gesammt-Werth nach 10 Jahren?

Hier ist $a = 3000$; $10 . \log.(1{,}04) = 0{,}1703330$
$b = 500$; $\log. 3000 = 3{,}4771213$
$u = 0{,}04$; $\log. A = 3{,}6474543$
$1 + u = 1{,}04$; $1{,}04^{10} - 1 = 0{,}48024$
und $n = 10$;

also A = 4440
und B = 6003
A + B = 10443 Thlr. der Gesammt-Werth.

XVII.

Würde unter den vorigen Bedingungen auf ein Kapital ein anderes Kapital b am Ende jedes Jahres abgetragen, so müßten die Werthe von A und B am Ende der Zeit berechnet und von einander abgezogen werden, um zu erhalten den Unterschied der Schuld, nämlich:

$$A - B = a(1+u)^n - \frac{b}{u} \cdot [(1+4)^n - 1].$$

Z. B. Ein Waldstück wurde vor 12 Jahren zu 2000 Klaftern abgeschätzt, und der Zuwachs zu $2\frac{1}{2}$ Procent angegeben; es sind aber seither jährlich 200 Klaftern geschlagen worden mit 10 Klaftern Ueberschuß im letzten Jahre; um wie viel weicht also die Schätzung ab von der Wirklichkeit?

| | | |
|---|---|---|
| Hier ist | $a = 2000$; | $\log. 1{,}025 = 0{,}0107239$ |
| | $b = 200$; | $12 \cdot \log. 1{,}025 = 0{,}1286868$ |
| | $u = 0{,}025$; | und $1{,}025^{12} = 1{,}34488$ |
| | $1 + u = 1{,}025$; | $(1+u)^n - 1 = 0{,}34488$ |
| | und $n = 12$; | |

folglich $A = 2689$ und $B = 2759$;

mithin $A - B = -70$; d. h. nach den Angaben der Schätzung hätten im letzten Jahre nur 130 Klaftern statt 200 geschlagen werden können, und die Abweichung mit den 10 Klaftern Ueberschuß ist also 80 Klaftern gewesen.

---

## C.

## Von dem Ertrage (oder der Rente) und dessen Berechnung.

XVIII.

Eine Rente (oder ein Ertrag) wird eine jährliche Summe dann genannt, wann diese Summe größer als die

jährlichen Zinsen des Kapitals sind, wovon sie bezogen wird. Das Kapital selbst, wovon die jährliche Rente gewonnen wird, heißt Stock (oder Mise), auch Gebot.

Soll nun die jährliche Rente b in n Jahren das Kapital a mit seinen Zinszinsen aufheben, so muß (nach XVI. und XVII.) $A - B = 0$, oder $a(1+u)^n = \frac{b}{u}[(1+u)^n - 1]$ seyn, und dieses ist die Grundgleichung für die Ertragberechnung, wo immer aus drei Gliedern das vierte gefunden werden kann. Gewöhnlich ist aber das Procent gegeben, oder es ist das landesübliche, und es wird daher theils die Zahl der Jahre n, theils das Gebot oder der Stock a, theils die Rente oder der Ertrag b mit Hülfe der obigen Gleichung gesucht. Angewendet wird diese Rechnung da, wo durch die jährliche Benutzung eines Dinges der Werth dieses Dinges am Ende der Zeit, in welcher die Benutzung statt fand, gleich Null werden soll, so z. B. auch in der Forst-Ertragbestimmung.

XIX.

Aus der jährlichen Rente b, der Zahl der Jahre n, beim Zinsfuße u, läßt sich der Stock (das Gebot) a dadurch finden, daß man die vorige Gleichung

$$a(1+u)^n = \frac{b}{u} \cdot [(1+u)^n - 1]$$

durch $(1+u)^n$ dividirt, und erhält:

$$a = \frac{b}{u} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+u)^n}\right].$$

Aufgabe I. Wie groß muß ein Kapital seyn, das mit seinen Zinszinsen, bei 4 Procent, 10 Jahre lang eine jährliche Rente von 600 Thlr. decken kann?

Hier ist $b = 600$, $u = 0{,}04$, $1 + u = 1{,}04$, $n = 10$ — $10 \cdot \log. 1{,}04 = 0{,}1703330$; diesen Log. abgezogen von $\log. 1 = 0$ giebt $l. (1 + u)^n = 0{,}8296670 - 1$; dazu die natürliche Zahl $= 0{,}67556\ldots$ und solche von 1 abgezogen, nämlich:

$$1 - \frac{1}{(1 + u)^n} = 0{,}32443;$$

und diese Zahl wieder mit $\frac{b}{u} = \frac{600}{0{,}04} = 15000$ multiplicirt giebt den Stock oder das Gebot

$$a = 4866 \text{ Thlr.}$$

Aufgabe II. Wenn ein Waldstück 20 Jahre lang jährlich 645 Thlr. reinen Ertrag liefern kann, wie viel darf man für diese Benutzung geben, so daß das anzulegende Kapital auf Zinszins zu $3\frac{1}{2}$ Procent stehen, und solches am Ende der Zeit sammt den Zinsen wieder abgetragen seyn soll?

Antwort: 9166 Thlr.

## XX.

Um für ein Gebot (Stock) a, nebst der Zahl der Jahre n beim Zinsfuße u, die jährliche Rente b zu finden, darf man nur die Grundgleichung

$$a \cdot (1 + u)^n = \frac{b}{u} \cdot [(1 + u)^n - 1]$$

beiderseits mit u multipliciren, dann mit $(1 + u)^n - 1$ dividiren, und man erhält:

$$b = \frac{a \cdot u \cdot (1 + u)^n}{(1 + u)^n - 1}.$$

Aufgabe I. Wie groß muß eine jährliche Rente seyn, die 20 Jahre für 8400 Thlr., bei 3 Procent auf Zinszins, zu erwarten ist?

In diesem Falle wird seyn:

$$\left.\begin{array}{r} a = 8400 \\ u = 0{,}03 \\ 1 + u = 1{,}03 \\ n = 20 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{rl} \text{also } \log.\ 1{,}03 = & 0{,}0128372 \\ & \overline{0{,}2567440} \quad (\cdot 20 \\ \log.\ 8400 = & 3{,}9242793 \\ \log.\ 0{,}03 = & 0{,}4771213 - 2 \\ & \overline{2{,}6581446} \\ \log.\ 0{,}806109 = & 0{,}9063938 - 1 \\ & - \qquad\qquad + \\ \log.\ b = & \overline{2{,}7517508} \end{array}$$

$1{,}03^{20} = 1{,}806109$;
$1{,}03^{20} - 1 = 0{,}806109$;
und $b = 564{,}6$ Thlr.

Aufgabe II. Ein ziemlich gleichförmig bestandener Waldort ist gegenwärtig zu 3000 Klaftern bei $2\frac{1}{4}$ Procent Zuwachs abgeschätzt, und soll in den nächsten 24 Jahren gleichförmig abgetrieben werden; wie viel kann man jährlich Klaftern davon schlagen?

Antwort: 163 Klaftern.

## XXI.

Wenn das Gebot a, und die jährliche Rente b, bei einem angenommenen Procente, gegeben sind, und man soll die Zahl der Jahre n finden, so löset man obige Grundgleichung

$$a(1+u)^n = \frac{b}{u}[(1+u)^n - 1]$$

gehörig für n als unbekannt auf, und man erhält:

$$\frac{1}{(1+u)^n} = 1 - \frac{au}{b}; \text{ oder } \left(\frac{1}{1+u}\right)^n = 1 - \frac{au}{b};$$

und dieses logarithmisch ausgedrückt

$$n \cdot \log. \left(\frac{1}{1+u}\right) = \log. \left(1 - \frac{au}{b}\right);$$

folglich den Werth für die Zahl der Jahre

$$n = \frac{\log.\left(1 - \frac{au}{b}\right)}{\log.\left(\frac{1}{1+u}\right)}.$$

Aufgabe I. Es hat Jemand 8000 Thlr. geborgt, und dafür ein Unterpfand zur Benutzung (z. B. einen Wald) gegeben, das jährlich 520 reinen Ertrag liefert; wie lange muß er die Benutzung des Unterpfandes zur Bezahlung des Kapitals und der Zinsen bei 4 Procent entbehren und dem Gläubiger überlassen?

Hier ist
$$\left.\begin{array}{r} a = 8000 \\ b = 520 \\ u = 0{,}04 \\ 1+u = 1{,}04 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ferner } \left(1 - \frac{au}{b}\right) = 0{,}384615\ldots \\ \log.\ 0{,}384615 = 0{,}5850263 - 1 \\ \text{und } \text{g.}\ \frac{1}{1{,}04} = 0{,}9829667 - 1; \end{array}$$

folglich der Werth für $n = \frac{0{,}5850263-1}{0{,}9829667-1} = \frac{-0{,}4149737}{-0{,}0170333} =$ $=$ 24 Jahre und einige Monate.

Da nun (nach XI.) der künftige Werth von 8000 Thlr. auf Zinszins zu 4 Procent in 24 Jahren = 20506 Thlr., hingegen der Werth der Benutzungen in dieser Zeit (nach XVI.) nur 20322 Thlr. ist; so muß der Gläubiger bei der Zurückgabe des Unterpfandes am Ende des 24sten Jahres noch 184 Thlr. erhalten. Würde aber der Gläubiger das Unterpfand 25 Jahre benutzen sollen und wollen, so ist dann der künftige Werth der 8000 Thlr. in 25 Jahren bei 4 Procent auf Zinszins nur 21326 Thlr., wogegen der Werth der 25jährigen Benutzung sammt deren Zinszinsen bis 21655 Thlr. anwächst, und der Gläubiger muß nun mit dem Unterpfande noch 329 Thlr. herausgeben.

Aufgabe II. Auf mehreren ziemlich gleichförmigen Beständen sind jetzt 31243 Klaftern abgeschätzt worden, die, ob sie gleich noch einen Zuwachs von $2\frac{1}{4}$ Procent haben, dennoch aus höheren Gründen von jetzt an zum Abtriebe kommen sollen; und nun fragt es sich: wenn davon jährlich 3000 Klaftern geschlagen werden, wie lange ist diese Holzmasse mit ihrem Zuwachse ausreichend?

Antwort: 12 Jahre.

Anmerk. Den Waldwerthberechnungen z. B. dienen diese Sätze der Zins- und Renten-Rechnung ebenfalls zur Grundlage; doch müssen über diese Werthbestimmungen der einzelnen Forstorte und ganzer Forste noch besondere Grundsätze, hergenommen theils aus den Begriffen von Eigenthum und Grundeigenthum — von Sicherheit, Wandelbarkeit und Freiheit der Kapitalwerthe — theils aus dem Forstbetriebe und der möglichen Anwendung einer besseren Wirthschaft aufgestellt werden, welches alles nicht hieher, wohl aber in eine praktische Mathematik für Forstleute, gehört.

Bayerische Staatsbibliothek München

Dresden, gedruckt bei Carl Gottlob Gärtner.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Reum, Johann Adam,

Grundlehren der Mathematik für angehende Forstmänner

Bd.: 1. Die Zahlenlehre. - 1823. - VI, 142 S.

Dresden 1823

Math.u. 308 e-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594466-1